

## Группы (преобразований прямой)

- ▷ Совокупность  $G$  биекций некоторого множества на себя называется *группой преобразований* (этого множества), если  $G$  содержит тождественное преобразование и замкнуто относительно композиции и взятия обратного.

**Задача 3.1.** Образуют ли группу а) аффинные преобразования прямой ( $x \mapsto ax + b$ ,  $a \neq 0$ ); б) дробно-линейные преобразования; в) дробно-квадратичные преобразования ( $x \mapsto \frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$ )?

**Задача 3.2.** Если группа преобразований прямой состоит из полиномиальных преобразований, то она состоит из аффинных преобразований.

**Задача 3.3.** Найдите такой инвариант<sup>1</sup>, что любой другой инвариант выразится через него для

- а) действия аффинных преобразований ( $x \mapsto ax + b$ ) на тройках точек прямой;
  - б) действия проективных преобразований на четверках точек прямой.
- ▷ Отображение групп преобразований называется *гомоморфизмом*, если оно переводит тождественный элемент в тождественный, а композицию в композицию. Биективный гомоморфизм называется *изоморфизмом*.

**Задача 3.4.** а) Для любой точки группа оставляющих ее на месте дробно-линейных преобразований изоморфна группе аффинных преобразований.

б) Группа комплексных дробно-линейных преобразований, сохраняющих данную окружность, изоморфна группе вещественных дробно-линейных преобразований.

---

<sup>1</sup>Т. е. функцию от координат этих точек, не меняющуюся при действии группы.