

Группы (преобразований прямой)

- ▷ Совокупность G биекций некоторого множества на себя называется *группой преобразований* (этого множества), если G содержит тождественное преобразование и замкнуто относительно композиции и взятия обратного.

Задача 3.1. Образуют ли группу а) аффинные преобразования прямой ($x \mapsto ax + b$, $a \neq 0$); б) дробно-линейные преобразования; в) дробно-квадратичные преобразования ($x \mapsto \frac{ax^2+bx+c}{dx^2+ex+f}$)?

Задача 3.2. Если группа преобразований прямой состоит из полиномиальных преобразований, то она состоит из аффинных преобразований.

Задача 3.3. Найдите такой инвариант¹, что любой другой инвариант выразится через него для

- а) действия аффинных преобразований ($x \mapsto ax + b$) на тройках точек прямой;
б) действия проективных преобразований на четверках точек прямой.
- ▷ Отображение групп преобразований называется *гомоморфизмом*, если оно переводит тождественный элемент в тождественный, а композицию в композицию. Биактивный гомоморфизм называется *изоморфизмом*.

Задача 3.4. а) Для любой точки группа оставляющих ее на месте дробно-линейных преобразований изоморфна группе аффинных преобразований.

б) Группа комплексных дробно-линейных преобразований, сохраняющих данную окружность, изоморфна группе вещественных дробно-линейных преобразований.

¹Т. е. функцию от координат этих точек, не меняющуюся при действии группы.