Геометрия Лобачевского

▷ Напомним, что в модели Пуанкаре геометрии Лобачевского прямые — это евклидовы обобщенные окружности, перпендикулярные абсолюту, а сохраняющие ориентацию движения суть комплексные дробно-линейные преобразования, сохраняющие внутренность круга (для модели в круге) или верхнюю полуплоскость (для модели в верхней полуплоскости).

Задача 4.1. Гиперболическая окружность (множество точек, находящихся на данном гиперболическом расстоянии от центра) в модели Пуанкаре является евклидовой окружностью (вообще говоря, с другим центром).

(Указание. Можете ли вы доказать это утверждение хотя бы для одной окружности?)

Задача 4.2. а) Все гиперболические "треугольники" с вершинами на абсолюте равны.

б) Все *описанные* "n-угольники" с вершинами на абсолюте равны.

Задача 4.3. Движение плоскости Лобачевского, сохраняющее ориентацию, заменой координат может быть приведено к одному из следующих видов:

— гомотетия верхней полуплоскости с центром в нуле ("гиперболическое движение");

— сдвиг верхней полуплоскости вдоль действительной оси ("параболическое движение");

— поворот круга относительно его центра ("эллиптическое движение").

(Указание. Сколько неподвижных точек может иметь такое движение?)

Задача 4.4. а) Выражение $\frac{|z-w|^2}{\operatorname{Im} z \operatorname{Im} w}$ является инвариантом действия группы $PSL_2(\mathbb{R})$ на парах точек верхней полуплоскости.

б) Как это выражение связано с двойным отношением точек Z, W и двух точек пересечения (гиперболической) прямой ZW с абсолютом?

▷ Расстояние d между точками z и w в модели Пуанкаре в верхней полуплоскости может быть найдено из формулы[1]

$$\operatorname{ch} d = 1 + \frac{|z-w|^2}{2 \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w}.$$

В частности, для близких точек $d = \frac{|z-w|}{\operatorname{Im} z} + o(|z-w|)$ («элемент длины имеет вид $\dfrac{ds}{y}$, где ds — евклидов элемент длины»).

Задача 4.5. Две прямые *строго параллельны* (т. е. пересекаются на абсолюте). Равно ли расстояние между ними нулю?

Задача 4.6. Чему в геометрии Лобачевского равна длина $l(r)$ окружности радиуса r? Больше она или меньше, чем в евклидовой геометрии?

Задача 4.7. Для прямоугольного треугольника а) выполняется *гиперболическая теорема Пифагора*: $\operatorname{ch} a \cdot \operatorname{ch} b = \operatorname{ch} c$; б) $a + b \leqslant c + \mathrm{const}$.

▷ Для произвольного гиперболического треугольника можно доказать, что

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b - \operatorname{sh} a \operatorname{sh} b \cos\gamma \qquad \text{(теорема косинусов);}$$

$$\cos\gamma = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta \operatorname{ch} c \qquad \text{(двойственная теорема косинусов).}$$

Задача 4.8. а) В прямоугольном треугольнике $\sin\alpha = \frac{\operatorname{sh} a}{\operatorname{sh} c}$.

б) В произвольном треугольнике $\dfrac{\operatorname{sh} a}{\sin\alpha} = \dfrac{\operatorname{sh} b}{\sin\beta} = \dfrac{\operatorname{sh} c}{\sin\gamma}$ ("теорема синусов").

[1] Напомним, что $\operatorname{ch} t = (e^t + e^{-t})/2$, $\operatorname{sh} t = (e^t - e^{-t})/2$.