Проективные преобразования и модель Клейна

▷ Рассматривая аффинную плоскость как плоскость $z = 1$ в трехмерном пространстве, можно отождествить точки проективной плоскости с проходящими через начало координат прямыми в пространстве. Если прямая имеет вид (at, bt, ct), то говорят, что соответствующая точка проективной плоскости имеет *однородные координаты* $(a : b : c)$.

Задача 5.0. Запишите уравнение гиперболы $x^2 - y^2 = 1$, параболы $y = x^2$, окружности $x^2 + y^2 = 1$ в однородных координатах и найдите все их точки на бесконечности.

Задача 5.1. Найдите (комплексные) однородные координаты точек проективной плоскости, через которые проходят все окружности.

▷ Действие группы $GL_3(\mathbb{R})$ линейных преобразований пространства индуцирует действие группы $PGL_3(\mathbb{R}) := GL_3(\mathbb{R})/\mathbb{R}^\times$ на проективной плоскости. При этом действии прямые переходят в прямые.

Задача 5.2. Действие группы проективных преобразований транзитивно на четверках точек общего положения.

Задача 5.3. Образ кривой второй степени при проективном преобразовании — кривая второй степени.

Задача 5.4*. Пусть три коники имеют пару общих точек. Любые две из них пересекаются еще по двум точкам — проведем через них по прямой. Докажите, что эти 3 прямые пересекаются в одной точке.

* * *

▷ В модели Клейна геометрии Лобачевского прямые — это (евклидовы) хорды абсолюта. Движения этой модели суть (вещественные) проективные преобразования, сохраняющие абсолют. В центре круга величина гиперболического угла равна величине евклидова угла.

Задача 5.5. Две прямые, одна из которых проходит через центр круга, перпендикулярны в модели Клейна тогда и только тогда, когда они евклидово перпендикулярны.

Задача 5.6. Центр круга нельзя построить одной линейкой.

Задача 5.7. Дан круг и две его пересекающиеся хорды. Постройте одной линейкой прямую, являющуюся гиперболической биссектрисой угла между ними.

Задача 5.8. Гиперболическая окружность в модели Клейна является евклидовым эллипсом.

Задача 5.9. Если две высоты гиперболического треугольника пересекаются, то все три его высоты пересекаются в одной точке.

(Можно доказать, что три высоты всегда принадлежат одному пучку прямых.)

Задача 5.10*. а) Средняя линия треугольника перпендикулярна серединному перпендикуляру.

б) Медианы гиперболического треугольника пересекаются в одной точке.