Группы II

▷ Пусть G — группа, H — ее подгруппа. Фактор-множество G по отношению эквивалентности «отличаться умножением справа на элемент из H» обозначается G/H.

Задача 6.1. Пусть G — группа преобразований какого-то множества, x — точка этого множества, G_x — *стабилизатор* точки x (множество элементов группы, оставляющих x на месте), Gx — *орбита* точки x (множество точек, которые можно получить, действуя на x элементами группы).

Убедитесь, что G_x — подгруппа группы G, и постройте биекцию между G/G_x и Gx.

Задача 6.2. а) Постройте биекцию между $\mathbb{R}P^1$ и фактором группы $SL_2(\mathbb{R})$ по подгруппе B верхнетреугольных матриц.

б*) Найдите подгруппу P в $SL_3(\mathbb{R})$, фактор по которой представляет собой $\mathbb{R}P^2$.

▷ Напомним, что *фуксовой группой* называется дискретная[1] подгруппа группы $PSL_2(\mathbb{R})$.

Задача 6.3. Опишите все дискретные подгруппы группы $SO(2)$ (состоящей из поворотов плоскости, сохраняющих начало координат).

Задача 6.4. Любой эллиптический элемент фуксовой группы имеет конечный порядок.

Задача 6.5. Является ли подгруппа $PSL_2(\mathbb{R})$, порожденная преобразованиями $z \mapsto z+1$ и $z \mapsto kz$ (k — фиксированное положительное число, не равное 1), фуксовой?

Задача 6.6. Укажите пару дробно-линейных преобразований, порождающих фуксову группу, фундаментальная область которой — внутренность (абсолютного) четырехугольника с вершинами -1, 0, 1, ∞.

[1] Т. е. такая, что для любого ее элемента g можно найти такой $\varepsilon > 0$, что все другие элементы подгруппы отличаются от g (например, покоэффициентно) более, чем на ε.