Кватернионы и вращения

▷ Пусть V — трехмерное евклидово пространство с базисом i, j, k. Алгебра *кватернионов* — это пространство $\mathbb{H} = \mathbb{R} \oplus V$ (формальных сумм чисел и векторов) с умножением, определяемым правилом $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Можно проверить, что это умножение ассоциативно.

Задача 7.1. а) Если u и v два вектора, то $uv = -(u, v) + [u, v]$, где $(-, -)$ скалярное произведение, а $[-, -]$ векторное произведение.

В частности, с точностью до умножения на константу, векторное произведение равно коммутатору $uv - vu$ соотвествующих кватернионов.

б) Выведите из ассоциативности умножения кватернионов *тождество Якоби* для векторного произведения: $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$.

Задача 7.2. Если v — вектор единичной длины, то $v^2 = -1$. Если вектора u и v ортогональны, то $uv = -vu$.

Задача 7.3. Пусть q — ненулевой кватернион. Отображение $v \mapsto qvq^{-1}$ а) переводит вектора в вектора; б) является поворотом вокруг некоторой оси.

Задача 7.4. а) Докажите, что отображение из предыдущей задачи дает сюръективный гомоморфизм групп $Sp(1) \to SO(3)$ (из кватернионов единичной нормы во вращения трехмерного пространства, сохраняющие начало координат) и найдите его ядро.

б) Докажите, что композиция поворотов вокруг осей, проходящих через начало координат — тоже поворот вокруг оси; найдите ось и угол поворота $s = rt$, где r — поворот на угол $\pi/2$ вокруг оси $(1, 0, 0)$, а t — поворот на угол $2\pi/3$ вокруг оси $(1, 1, 1)$.

Будем рассматривать 4-мерное евклидово пространство как множество всех кватернионов.

Задача 7.5. а) Отражение 4-мерного пространства относительно 3-мерного подпространства с нормалью q имеет вид $v \mapsto -q\bar{v}q$.

б) Любое преобразование из $SO(4)$ (т. е. собственное движение четырехмерного пространства, оставляющее на месте начало координат) может быть записано в виде $v \mapsto lvr$ для некоторых кватернионов l и r.

(Указание. Любое движение — композиция отражений.)

в) Постройте сюръективный гомоморфизм $Sp(1) \times Sp(1) \to SO(4)$ и найдите его ядро.

* * *

Задача 7.6. а) Группа вращений (правильного) тетраэдра изоморфна группе A_4.

б) Найдите прообраз группы вращений тетраэдра при отображении $Sp(1) \to SO(3)$ (удобно взять тетраэдр вписанный в стандартный куб).

в) Изоморфна ли эта группа прямому произведению $A_4 \times \mathbb{Z}/2$? группе S_4?

Задача 7.7. а) Группа вращений куба изоморфна группе S_4.

б) Группа вращений додекаэдра (или икосаэдра) изоморфна группе A_5.

Задача 7.8*. а) Найдите прообраз группы икосаэдра при отображении $Sp(1) \to SO(3)$.

б) Изоморфен ли этот прообраз прямому произведению $A_5 \times \mathbb{Z}/2$? группе S_5?