Геометрия

Лекция 1

Постулаты Евклида:

1. От всякой точки до всякой точки можно провести прямую
2. Ограниченную прямую можно непрерывно продолжить по прямой
3. Из всякого центра всяким радиусом может быть описан круг
4. Все прямые углы равны между собой
5. Если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние односторонние углы, меньшие двух прямых, то, продолженные неограниченно, эти две прямые встретятся с той стороны, где углы меньше двух прямых

С этих пяти постулатов Евклид начинает «Начала» (греч. $\Sigma\tau o\acute{\iota}\chi\epsilon\acute{\iota}\alpha$, лат. Elementa). Сам термин «Начала» не очень удачен, Евклидовское $\Sigma\tau o\acute{\iota}\chi\epsilon\acute{\iota}\alpha$ в новогреческом обозначает «стихия», а по-гречески «единосоставные части», в том смысле, в котором буквы составляют слова. Само слово элемент было придумано с целью перевести название книги Евклида.

Таким образом, Евклид предполагает из основных кирпичиков, атомов, или можно сказать стихий, огонь, земля, вода и воздух, создать здание геометрии.

Евклид отправляется от аксиом или постулатов, различие между аксиомой и постулатом не так существенно для нас, его можно понимать поразному. Насчет того, почему часть суждений Евклид называет аксиомами, а половину постулами много написано, но мы не будем на этом останавливать. Самым приблизительным образом можно сказать, что аксиомы выражают общелогические истины. Например, его вторая аксима «если к равным прибавляются равные, то и целые равны», а первая – это просто транзитивность равенства «равные одному и тому же равны между собой», постулаты же напротив – геометрические суждения. Другая интерпретация состоит в том, что постулаты говорят о построениях, которое можно совершить. Например, третий постулат говорит о том, что из всякого центра можно построить окружность любого радиуса. Действительно, Евклид и начинает с построений, первое предложение Евклида – это построить равносторонний треугольник по стороне. Исходя из этих аксиом и постулатов, а также общих понятий, Евклид выстраивает здание геометрии.

Стоит заметить, что «Начала» Евклида – это несомненно самая успешная книга, как основной учебник геометрии она просуществовала вплоть до второй половины IX века. В России существует пять дореволюционных переводов (в то время как переводов Илиады только четыре): И. П. Сатарова 1739 г., правда, сделанный не с греческого, а с латыни; Н. Г. Курганова в 1769 г. с французского; Ф. И. Петрушевского в 1819 г., считающийся самым лучшим переводом из дореволюционных; и М. Е. Ващенко-Захарченко в

1880 г., перевод более низкого класса, но адаптированный для использования школьными учителями.

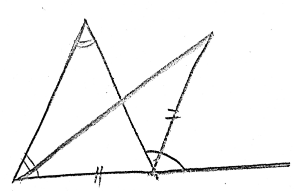
Из пяти постулатов явно выделяется пятый. И сейчас, после того как геометрия Лобачевского на столько вошла в обиход, что обсуждается на первом курсе университета, уже для нас нет парадокса, связанного с этим постулатом, но в течение 1000 лет это все было очень парадоксально и загадочно. И сейчас с высоты накопленных новых знаний мы можем поразиться тому, насколько точно Евклид, неимевщий понятия о неевклидовой геометрии, все увидел и написал. Он избежал ошибок многих позднейших авторов. Гениальная книга не только тем, что в ней есть, но и тем, чего в ней нет, и тем как она подготавливает путь будующим исследователям. Мы увидим, насколько точно он увидел необходимость пятого постулата.

И эту необходимость тем труднее увидеть, что подавляющая часть геометрии, те утверждения, которые являются общими для геометрии Евклида и геометрии Лобачевского, не нуждаются в пятом постулате, и Евклид как раз долго его не использует.

Вот он идет: «построим равносторонний треугольник», «принципы равенства треугольников» (известные еще со школы), затем, что «против большей стороны лежит больший угол», что «внешний угол больше любых двух внутренних, не смежных с ним».

Немного более подробно о доказательстве этого факта:

Он выводит теорию равнобедренных треугольников: проводит сторону, рав-

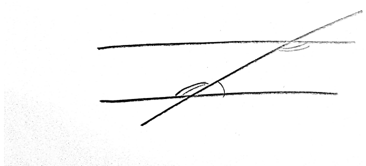


ную данной, и из чертежа легко установить, что внешний угол больше, и для этого факта не нужен пятый постулат.

Так продолжается вплоть до Предложения 28.

Также доказывает теорему о внутренних и накрестлежащих углах. «Если прямая, падающая на две прямые, образует угол равный внутреннему и накрестлежащему, или внутренний и односторонний вместе равны двум прямым, то прямые параллельны». Сейчас под параллельными прямыми имеем в виду прямые, лежащие в одной плоскости и не пересекающиеся. Действительно, верность этого предложения следует из утверждения о внешнем угле. Если два угла в сумме дают два прямых, то прямые не могут пересечься, иначе мы пришли бы к противоречию с утверждением о том, что внешний угол больше любого другого. И то же самое в другую сторону.

Доказательство, приведенное Евклидом, безупречно, и не использует пятый постулат. И между 28 и 29 Предложением происходит событие – входит



в игру пятый постулат. Евклид в 29м предложении доказывает обратное утверждение. Подчеркнем: «Если углы равны, то прямые параллельны, то есть не пересекаются» требует использование пятого постулата. Евклид задается вопросом, имеет ли место обратное утверждение: «Если прямые не пересекаются, то и углы равны»? Поразительно, что Евклид понимает, и не предпринимает попытки доказать это утверждение.

И несмотря на многие ошибки Евклида и шероховатости в построении его здания в этом ключевом месте Евклид не ошибся в отличие от многих позднейших его комментаторов, так как не пытался доказать это утверждение, так как здесь нужен пятый постулат (он по существу эквивалентен 29му предложению). Евклид и дальше продолжил развивать геометрию, и видно, что существенная часть делается без пятого постулата.

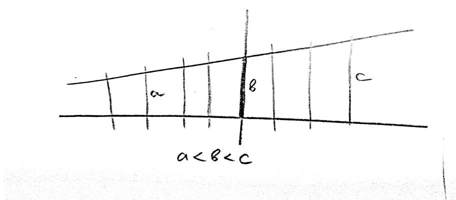
Конечно, книга Евклида много раз комментировалась, один из первых известных комментариев принадлежит Проклу, но комментариев было гораздо больше. И, конечно, комментаторы не могли не обратить внимание на существенное отличие пятого постулата от всех прочих. Действительно, первые четыре очевидны, а пятый постулат – это что-то более тонкое. Например, пятый постулат в этой формулировке не может быть проверен ни в какой ограниченной области пространства. Прямые пересекутся, но могут это сделать сколь угодно далеко. Но пятый постулат может быть переформулирован, чтобы можно было его проверить в ограниченной области пространства. Так или иначе, он долго не используется, и он гораздо сложнее для восприятия.

И геометры начали попытки, которые будут длиться 2000 лет, доказать пятый постулат, исключив его тем самым из числа постулатов. Греческие попытки в основном сводятся к переформулировкам «эквидистанта от прямой сама есть прямая», и это утверждение, как мы видим, не верно в геометрии Лобачевского. Если взять прямую, и взять множество точек, находящихся на данном расстоянии от прямой, есть прямая – это утверждение эквивалентно пятому постулату.

Разные рассуждения связанные с тем, чтобы свести сумму углов треугольника равна двум прямым. Верно и обратное, и доказывается в книге П. А. Широкова «Краткий очерк основ геометрии Лобачевского» (тоже предназначена для школьных учителей), Roberto Bonola «Неевклидова геометрия» и книжка В.Ф. Каган «Лобачевский» (кратко и емко описывается предыстория создания неевклидовой геометрии).

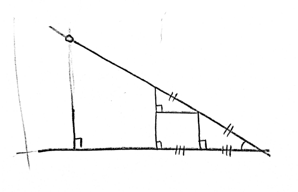
Геометры поняли, что утверждение, что сумма всех углов равна двум прямым, эквивалентно пятому постулату. Приведем доказательство этого факта, как это сделано у Bonola, который в свою очередь ссылает на арабского математика Nasir al-Din.

«Если есть перпендикуляр и наклонная, то соответствующие перпендикуляры будут уменьшаться с той стороны, где угол острый, и увеличиваться с той стороны, где угол тупой»



Из этого предложения несложно вывести существование прямоугольника. Возьмем отрезок, восстановим для равных перпендикулярных отрезка, тогда из этого постулата ясно, что и оставшиеся два угла будут прямыми. И из существования хотя бы одного прямоугольника вытекает верность геометрии Евклида, выполнение пятого постулата. И доказательство не так сложно, и оно приведено в книге Bonolo, приведем его кратко.

Утверждение: если есть прямая и перпендикуляр, то надо доказать, что наклонная и перпендикуляр непременно встретятся. (эквивалентно пятому постулату) Доказательство (Nasir Al-Din):
Путь не встретятся, тогда построим маленький прямоугольный треугольник, теперь, пользуясь тем, что существует прямоугольник, тогда будем идти дальше, откладывая равные отрезки на наклонной прямой. Тогда и на горизонтальной прямой высекаемые отрезки будут равны. Тогда дойдем за точку, из которой построен перпендикуляр, и получим треугольник, содержащий отрезок, построенный из этой точки. Тогда эту прямая должна пересечь и наклонную прямую.



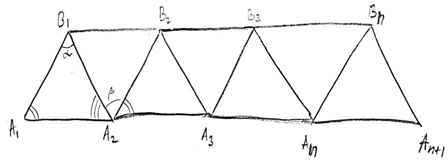
Видим, что пятый постулат заменяется на что-то более простое в очередной раз, но не вытекающее из предыдущих четырех.

Перескочим через несколько замечательных исследований на эту тему. Д. Саккери, написал ряд блестящих сочинений о попытке обоснования аксиомы параллельности. Также перескакием через немецкого исследователя Lambert (1718–1777), он выстраивает четкую и продуманную систему, и не приходит к противоречию, усматривает, что треугольник должен определяться своими углами, что характерно для геометрии Лобачевского. То есть он получает абсолютный элемент длины, где углы определяют стороны. Также удивителен тем, что пишет «можно почти представить себе, чтобы эта геометрия реализовывалась на какой-то воображаемой поверхности». То есть Ламберт видит возможности для существования подобной геометрии.

Оставляя предыдущие исследования, перейдем к исследованиям А. М. Лежандра, написавшего большую книгу и учебник по геометрии, сильно повлиявший на преподавание геометрии в России, и который использовал для преподавания Лобачевский. Во-первых, доказывает, что сумма углов в треугольнике либо равна, либо меньше двух прямых, никак не может быть больше. Важно отметить, что всем предыдущим математикам в какой-то степени была известна неевклидова геометрия, а именно им была известна сферическая геометрия, геометрия на сфере. В этом случае под прямыми понимаются окружности большого круга, здесь нельзя продолжать прямые неограниченно, они обязательно пересекутся. И кроме того, здесь сумма углов треугольника больше двух прямых на сфере. Существует треугольник с тремя прямыми углами, для того, чтобы это представить нужно поместить одну вершину в северный полюс, одну на экватор, а потом провести еще один меридиан под прямым углом. Таким образом, два меридиана, пересекающие под прямым углом, и экватор разобьют сферу на 8 треугольников, у которых все углы будут прямые. То есть уже для греков не было ничего парадоксального, что сумма углов в треугольнике может быть больше двух прямых. Но в сферической геометрии уже не выполнен даже второй постулат, так что она могла давать только аналогию, чтобы можно было представить, что на какой-то другой поверхности реализуется геометрия, что сумма углов в треугольнике может быть меньше двух прямых.

Приведем доказательство Лежандра, что сумма углов треугольника не может быть больше двух прямых.

Рассмотрим треугольник, теперь его продолжим, и получим семейство конгруэнтных треугольников.



Треугольники $A_1B_1A_2, A_2B_2A_3, \ldots, A_nB_nA_{n+1}$ конгруэнтны, то и $B_1A_2B_2, B_2A_3B_3, \ldots, B_nA_{n+1}B_{n+1}$ тоже конгруэнтны. Рассмотрим углы α и β. Если $\beta \geq \alpha$, то сумма углов меньше двух прямых, $2d$. Предположим обратное, и запишем неравенство треугольника, обращаясь ко всей ломаной:

$$A_1B_1 + nB_1B_2 + \cdots + B_{n+1}A_{n+1} \geq nA_1A_2$$

Откуда получаем, что

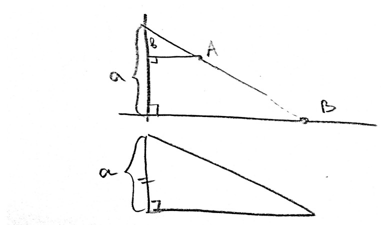
$$2A_1B_1 \geq n(A_1A_2 - B_1B_2)$$

Откуда видно, что

$$A_1A_2 \leq B_1B_2$$

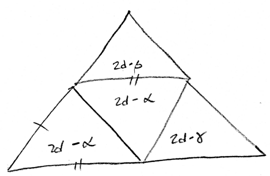
Что означает, что $\alpha \leq \beta$, так как против большей стороны лежит больший угол. Итак, сумма углов получилась меньше двух прямых, или как максимум равна. Также можно доказать, что если сумма углов в хотя одном треугольнике равна двум прямым, то и в другом тоже.

Приведем рассуждение Wallis пятого постулата. Нужно доказать, что непременно пересекутся перпендикуляр и секущая. Давайте опустим перпендикуляр из точки A, и рассмотрим подобный треугольник, с коэффициентом подобия, равный отношению отрезков a и b. Наложим эти треугольники, и получим точку пересечения B. Здесь используется утверждение, что можно построить треугольник, подобный данному с фиксированным коэффициентом подобия, что эквивалентно пятому постулату.

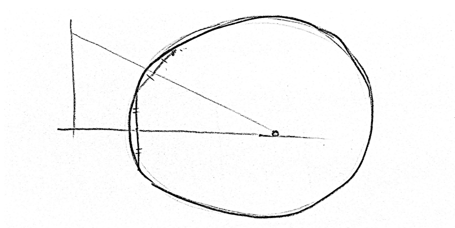


И следуя Лежандру, докажем пятый постулат. Он отверждает, что сумма углов или во всех треугольниках меньше, или во всех треугольниках больше. Предположим, что меньше двух прямых, например $2d-\alpha$, то возьмем треугольник и к нему приложим треугольник, конгруэнтный данному, у которого сумма углов также $2d - \alpha$. Затем продолжим стороны первого треугольника неограниченно, и через вершину второго треугольник проведем прямую пересекающую эти продолжения. В полученных треугольнике сумма углов также меньше двух прямых: $2d - \beta$ и $2d - \gamma$. Посчитаем сумму углов в большом треугольнике. Для этого складывая углы и получаем $8d - 2\alpha - \beta - \gamma - 6d = 2d - 2\alpha - \beta - \gamma$. Предполагается, что сумма углов меньше на α, тогда получили, что сумма углов меньше на 2α. Но почему можно провести прямую, пересекающую данные две прямые? Ответ нельзя, так как это предложение и екивалентно пятому постулату. И в геометрии Лобачевского это не всегда можно сделать.

В копилку к неудачным доказательствам пятого постулата приведем доказательство Ф. Бойяи. Надо доказать, что перпендикуляр пересекается секущей. Возьмем точку, внутри фигуры, образованной прямой, перпендику-



ляром и секущей, опустим два перпендикуляра на прямую и секущую, полученные две точки не лежат на одной прямой. Продолжим каждый отрезок на равный ему длиной за пределами каждой прямой, и через полученные точки проведем окружность. Тогда ясно, что центр – это точка пересечения секущей и прямой. Но утверждение о существовании окружности эквива-



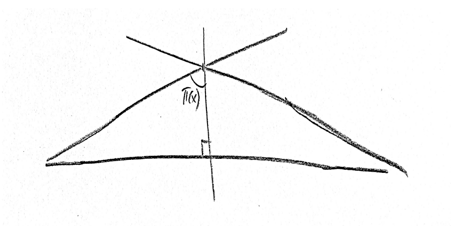
лентно утверждению о пересечению прямой с секущей.

Цитата из письма отца Ф. Бойяи сыну Я. Бойяи, зная, что сын пишет доказательство пятого постулата: "Умоляю тебя, не делай только и ты попыток одолеть теорию параллельных линий. Ты затратишь на это все свое время, а предложения этого вы не докажете все вместе. Не пытайся одолеть теорию паралелльных линий ни тем способом, который ты сообщаешь мне, ни каким-то другим. Я изучил все пути до конца. Я не встретил ни одной идеи, которой бы я не разрабатывал. Я прошел весь беспросветный мрак этой ночи, и всякую радость жизни в ней похоронил. Ради бога, умоляю тебя, оставь это. Страшись этого не меньше, чем чувственных увлечений, потому что они тоже могут лишить тебя всего твоего времени, здоровья, покоя, всего счастья в твоей жизни. ..... и никогда несчастный род человеческий не будет обладать чем-либо совершенным, даже в геометрии. Это большая и вечная рана в моей душе."

И уже меньше, чем через 15 лет никому не известный профессор казанского университета Н. И. Лобачевский выступил в 1826 году выступил с докладом о началах новой геометрии. А в 1829 было опубликовано подробное изложение основ новой геометрии.

Биография Лобачевского захватывающа, драматична и трагична. Лобачевский – удивительный деятель просвещения не только тем, что был, как говорил Клиффорд, Коперником геометрии, но и по складу был такой, что стал ректором Казанского университета. Молодость Лобачевского прошла в один из самых мрачных периодов для Казанского университета и для русского просвящения в целом, но тем не менее Лобачевский смог устоять и дать миру свою геометрию. Началось с того, что Лобачевский должен был читать курс по геометрии и написал даже учебник по геометрии, и ясно, что на курсе он должен был обратиться и к аксиоме о параллельных. И, видимо, он пытался доказать аксиому о параллельных прямых, так как один из докладов так и назывался «аксиома о параллельных», но быстро понял, что это нельзя доказать. И видим, что Лобачевский был не одинок в предвидении.

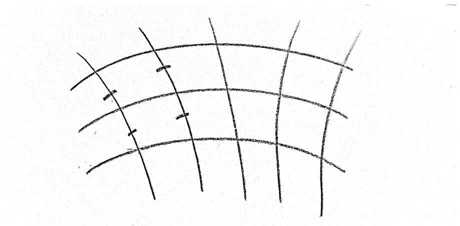
Когда Бойяри младший увидел сочинение Лобачевского, подумал, что Гаусс, осмелившись опубликовать свои исследования по неевклидовой геометрии, опасаясь уничтожающей критики, взял псевдоним, о котором никто не мог догадаться из неизвестного никому Казанского университета, чтобы никто не мог понять, что это его работа. Замечательно, и то, как высоко оценил Бойяри сочинения Лобачевского. Лобачевский делал свое исследование в полной изоляции, не имея никакого маяка перед собой, полностью сам. Начинает систематические исследования, где за основу вместо пятого постулата берется противоположное утверждение: утверждение, что для любой прямой, и точки, не лежаний на ней, существует несколько прямых, проходящих через одну точку, не пересекающих данную прямую. Это постулат Лобачевского. И исходя из этого постулата Лобачевский в течение



10 лет строит свое здание «воображаемой геометрии». Коротко опишем его подход. Из данной прямой можно провести как минимум две, не пересекающие данную.

Есть прямые пересекающие эту, и есть не пересекающие, ясно, что будет и крайняя, а будет ли она пересекать данную или нет? Она будет не пересекать, но также можно сказать, что будет пересекать в бесконечно удаленной точке, то есть сближаться и исходной прямой неограниченно. Видим, что бесконечно удаленные точки сразу возникают в геометрии Лобачевского, и будут называться точками Абсолюта, что является пучком прямых. Будут две прямые, которые будут сближаться, проведем перпендикуляр, и обозначим $\Pi(x)$ – их угол параллельности (угол между асиптотической прямой и перпендикуляром), который в геометрии Лобачевского может принимать любые значения в отличае от Евклидовской геометрии.

Важную роль для Лобачевского играет аналог теоремы Фалеса. Рассматривает пучок параллельных прямых, который пересекается с другими прямыми. И говорит, что если высечь равные отрезки, то при смещении на равные отрезки, расстояние будет умножаться на некоторую величину. И это является основой для всех метрических соотношений.



Лобачевский приходит к выводу этих метрических соотношений, и понимает, что угловой дефект – это площадь треугольника, так как он аддитивен. И один из постулатов в геометрии Лобачевского – это существование треугольника сколь угодно большой площади, что эквивалентно пятому постулату.

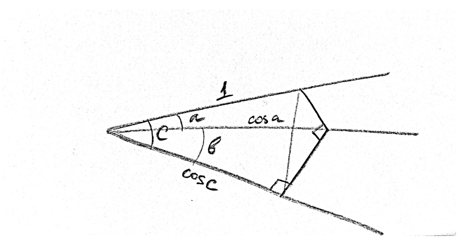
Он должен разработать нахождение одних элементов треугольника через другие, например, теорему Пифагора для своей геометрии.

Экспонента q^x возникает, когда, двигаясь по пучку параллельных прямых, можно показать, что расстояние между ними умножается на какую-то константу, где q – это параметр кривизны.

При этом Лобачевский понимает, что если $q \to 1$, то получается геометрия Евклида в пределе. И он хочет ввести свою тригонометрию исходя из евклидовых соотношений и вдохновляется соответствующими рассуждениями в геометрии сферы.

Теорема Пифагора в сферической геометрии:

Треугольник, он же трехгранный угол, и если одну из сторон взять за единицу, то плоский угол c – это и есть гипотенуза, так же обозначаем за a и b катеты, и соответствующий стороны равны $\cos c$ и $\cos a$.



Получаем теорему Пифагора в сферической геометрии

$$\cos c = \cos a \cdot \cos b.$$

Также можно получить и другие тригонометрические соотношения.

Здесь замечательно не только соответствие обычной теореме Пифагора:

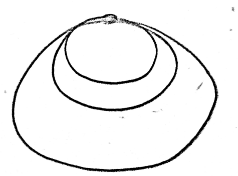
$$1 - \frac{c^2}{2} = (1 - \frac{a^2}{2} + ...)(1 - \frac{b^2}{2} + ...),$$

что соответствует

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

а что доказательство в сферической геометрии сводится к геометрии плоской.

Лобачевский делает то же самое в своем собственном пространстве, строит свою геометрию. Представим точку, и проходящие через нее окружности, как показано на рисунке:



Центр окружности удаляется, предел секущих – это прямая в плоскости Евклида. В геометрии Лобачевского же это рассуждение приводит к новой фигуре, «орициклу». Лобачевский убеждается, что внутренняя геометрия этой «орисферы» (пределное положение сферы, построенное по тому же правилу) – это геометрия Евклида. На орисфере реализуется геометрия Евклида. Вытаскивая таким образом из сферы геометрию треугольников, он находит свою теорему Пифагора:

$$\operatorname{ch} c = \operatorname{ch} a \operatorname{ch} b, \quad \text{с точностью до константы, где} \quad \operatorname{ch} = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2},$$

И это позволяет Лобачевскому доказывать сложнейшие геометрические утверждения. Отправляясь от отрицания пятого постулата, он вывел геометрию и не пришел к противоречию.

Но сейчас мы доказали обратное утверждение, то есть что геометрия Лобачевского гарантирует непротиворечивость геометрии Евклида так как нашли ее внутри геометрии Лобачевского, но ясно, что из этого не следует непротиворечивость геометрии Лобачевского.

Сам Лобачевский так и не смог доказать непротиворечивость своей геометрии. Приводит психологический аргумент: «Если бы противоречие было, то я бы его уже нашел». В качестве еще одного интересного психологического аргумента говорит: «мои теоремы сводятся к теоремам в сферической геометрии заменой единицы на мнимую единицу». Таким образом, если бы было противоречие в геометрии Лобачевского, то пришли бы к противоречию в сферической геометрии.

Прежде чем исследовать вопрос о непротиворечивости геометрии Лобачевского, опишем, какую реакцию вызвала работа его геометрия в России и в мире. Работа Лобачевского была издана и представлена в академии наук. И на нее писал отзыв Остроградский, умный и образованный человек (Модзалевский «Лобачевский», 1948 г.): «Академия поручила мне рабозрать одну работу господина Лобачевского, ректора Казанского университета. Автор по-видимому задался целью, что нельзя было его понять. Он достиг этой цели. Большая часть книги осталась столь же неизвестной для меня, как если бы я никогда не видал ее. В ней я понял только следующее: можно допустить, что сумма углов в треугольнике меньше, чем два прямых угла. Геометрия, вытекающая из этой гипотезы, труднее и пространнее известной нам и может служить большим подспорьем в чистом анализе и в теории определенных интегралов, так как она уже послужила для нахождения двух определенных интегралов. Из того, что я прочел, я считаю своим долгом сообщить академии следующее: из двух определенных интегралов один интеграл уже известен, значение другого интеграла является новым, оно и есть достояние господина казанского ректора. К несчатью, оно неверно.»

Ясно, что Лобачевский в своей работе допустил именно неточность, которую иногда допускают подавляющее число школьников, не написал, в каком интервале должен изменяться α, то есть забыл написать, что $0 < \alpha < \pi$. И Остроградский придрался именно к оформлению.

«Все, что я понял из того, что делает Лобачевский, ниже посредственного. Все то, чего я не понял, было, по-видимому плохо изложено, потому что в этом трудно разобраться. Из этого я вывел заключение, что книга господина ректора Лобачевского опорочена ошибкой, небрежно изложена, и следовательно не заслуживает внимания». После чего Остроградский входит в историю науки Геростратом, так как даже не сделал ни малейшей попытки увидеть открытие.

Помимо этого, или сам Остроградский, или близкий к нему математик опубликовал пасквиль, в котором было следующее:

«Есть люди, которые, прочитав иногда книгу, говорят, что она слишком проста. Таким любителям думания советуем прочесть книгу Лобачевского. Вот уж подлинно есть, о чем подумать. Многие из первоклассных наших математиков читали ее и ничего не поняли. Даже трудно было понять, как Лобачевский в такой легкой и ясной науке как геометрия смог сделать такое темное, тяжелое и непроницаемое учение. .... Почему не вообразить черное белым, круглое четырехугольным, сумму всех углов в прямоугольном треугольнике меньше двух прямых, и один и тот же определенный интеграл равным то $\frac{\pi}{4}$, то бесконечность. ....

Для чего же писать, да еще и печатать такие нелепые фантазии? Признаюсь, на этот вопрос отвечать трудно.

Если не ученый, то по крайней мере здравый смысл должен иметь каждый учитель.

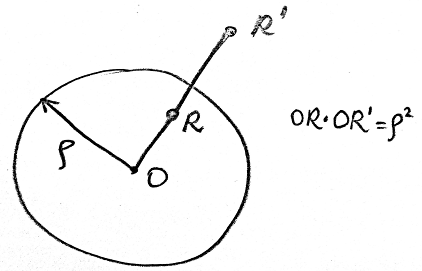
Соображая все сие, что истинная цель есть просто шутка или просто сатира на ученых математиков, а может и вообще на ученых сочинителей

.... Не могу не попинать ему на то, что он не дал своему сочинению надлежащего заглавия, и заставил нас думать по-напрасну. Почему бы не писать «сатира на геометрию» или «карикатура на геометрию», чтобы читатель мог сразу понять. Хорошо, что мне удалось разглядеть настоящую цель».

Опишем модель геометрии Лобачевского в первом приближении:

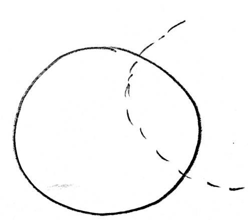
Модель Kleine - Poincare геометрии Лобачевского

Инверсия – преобразование плоскости, выворачивание ее относительно окружности, то есть точки R и R' переходят друг друга по следующему правилу:



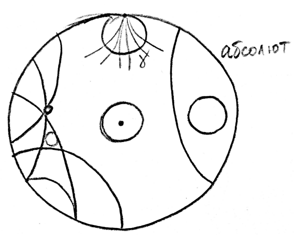
То есть аналог симметрии относительно окружности. Поясним, что такое пространство плоскости Лобачевского, и что такое движение, так как здесь важный поворот точки зрения.

Мир – внутренность круга, то есть с самого начала появляется абсолют. Движения - инверсии, сохраняющие плоскость Лобачевского, внутренность этого круга. Окружность инверсий должна быть перпендикулярна данной. И эта инверсия и является движением в плоскости Лобачевского.



Пуанкаре рассуждает, что математическое понимание часто приходит внезапно при самых неожиданных обстоятельствах. «Мы пошли на пикник с друзьями в окрестностях Парижа, выпивали и закусывали. И когда пришло время возвращаться в Париж, я поставил ногу на стойку дилижанса в Кутансе, как понял, что является движением в плоскости Лобачевского». То есть это абсолютно нетривиальное утверждение, и является ответом, к которому мы дойдем в курсе.

Такие движения сохраняют окружности, и *прямые* в этой модели и будут окружности, ортогональные абсолюту. Видно, что нет пятого постулата, так как через точку можно провести множество прямых, не пересекающих данную, и есть паралелльние, то есть крайние прямые.



Углы есть суть углы, так как инверсия сохраняет углы. Даже на картинке видно, что сумма углов меньше 180. Окружность, целиком лежащая внутри круга, суть окружность, и пока это придется принять на веру. Отсюда видно, что три точки не всегда лежат на одной окружности, так как евклидова окружность может выскочить за пределы абсолюта. Площадь – угловой дефект. Орицикл – предельная окружность, γ. Что такое расстояние определим позже. Метафорически, если человек выходит из центра и двигается с единичной скоростью в мире Лобачевского, то с точки зрения Евклида он становится все меньше, и никогда не выйдет за пределы круга.

Замечание 1

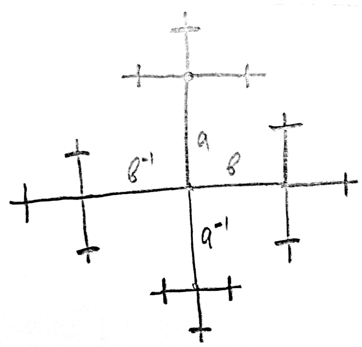
Это рассмотрение привело к совершенно новому пониманию того, что такое геометрия. Здесь возникает идея Эрлангенская программы Клейна. И это касается философии математики. Вместо представления, что геометрия только одна, возникает другое, что геометрия – это множество движениий.

Пусть G – группа движений. Дальше приходим к новому пониманию, что такое геометрия. Исходные объекты геометрии таковы: X – это множество, G – это группа преобразований X. Далее изучаем действия и инварианты действия G на X. Например, если X – это плоскость, G – преобразование плоскости, то получаем Евклидову геометрию. В геометрии Лобачевского группа G гораздо богаче. В частности даже движения плоскоти не коммутируют: поворот и перенос не коммутируют, и два поворота не коммутируют. При этом группа движений не коммутирует. Возьмем дефект преобразования $g_1 g_2 g_1^{-1} g_2^{-1}$. Преобразования коммутируют, если получается тождественное преобразование. G – некоммутативна, а ее коммутант $[G,G] \subset G$ коммутирует, такие группы называются разрешимыми. Группа движений плоскости Евклида разрешима.

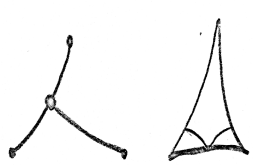
А дефект коммутативности для геометрии лобачевского Лобачевского слишком сложен, и группа G проста.

Замечани 2, пример (геометрия деревьев)

Приведем пример бесконечного четырехвалентного дерева, здесь сразу понятно, что такое расстояние, это длина пути. Строится так: сначала рисуется крест, где каждый из отрезков имеет равную длину, на каждой новой вершине снова рисуется крестик, и дальше действуем по индукции, получается бесконечное четырехвалентное дерево, и удобно написать символы на ребрах:

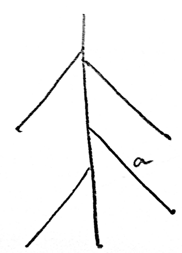


Введено пространство и расстояние между любыми двумя точками. Треугольник здесь это фигура, изображенная на рисунке:

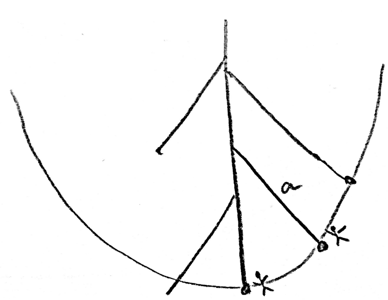


И если было бы что-то другое, то был бы цикл. Прямая – это такая кривая, не проходящая дважды один и тот же отрезок, используется термин *геодезическая.* В геометрии Лобачевского все треугольники узкие, любая точка на стороне треугольника находится на очень близко или к одной стороне, или к другой. И вырожденные треугольники для геометрии деревьев являются явными аналогами.

Для того, чтобы расстояние между прямыми стремилось к нулю, прямые должны совпасть. Берем геодезическую, берем рассстояние a, затем проходим немного дальше и возвращаемся на это расстояние. То есть идет прямая, а в нее вливаются другие прямые:



То есть получаем, что если два человека придут к концу отрезков, построенных из геодезической, одновременно, то это будет окружностью, это и есть орицикл, и является аналогом орицикла в геометрии Лобачевского. Точка абсолюта – это суть прямые, но сливающиеся прямые считаются за одну.



Геометрия дерева – это удачная карикатура геометрии Лобачевского. Геометрия Лобачевского открывает новый мир.