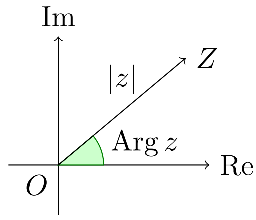
Комплексные числа и планиметрия

▷ Напомним, что *комплексным числом* называется запись вида $x+yi$, где x и y действительные числа, а i — формальный символ. Умножение комплексных чисел задается правилом $i^2=-1$.

$$(x+yi)+(x'+y'i)=(x+x')+(y+y')i;$$
$$(x+yi)\times(x'+y'i)=(xx'-yy')+(xy'+x'y)i.$$



Будем отождествлять комплексное число $z=x+yi$ с точкой $Z=(x,y)$ плоскости.

Модулем числа z называется длина вектора OZ, а *аргументом* числа z — (ориентированный) угол между осью абсцисс и вектором OZ. Число с модулем r и аргументом ϕ равно $r(\cos\phi+i\sin\phi)$.

Задача 0.1. а) Какое множество точек на плоскости задается условием $|z-i|=|z-1|$?
б) Найдите образ этого множества при отображении $z\mapsto(1+i)z$.
в) Какое множество точек на плоскости задается условием $(z-i)(\bar z+i)=1$?

Задача 0.2. При умножении комплексных чисел аргументы складываются, а модули перемножаются.

Задача 0.3. а) Преобразование плоскости $z\mapsto az$ $(a\neq 0)$ является *поворотной гомотетией* (т. е. композицией поворота и гомотетии *с тем же центром*).
б) При каких a и b преобразование плоскости $z\mapsto az+b$ $(a\neq 0)$ является поворотной гомотетией? С каким центром? Когда оно является поворотом?
в) Композиция поворотных гомотетий и параллельных переносов является либо поворотной гомотетией, либо параллельным переносом. Композиция поворотов и параллельных переносов является либо поворотом, либо параллельным переносом.

Задача 0.4. а) Три точки Z_1, Z_2, Z_3 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда их *простое отношение* $\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}$ вещественно.
б) Каков геометрический смысл аргумента и модуля простого отношения трех точек?

Задача 0.5. Четыре точки Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 лежат на одной окружности или одной прямой тогда и только тогда, когда их *двойное отношение* $\dfrac{z_1-z_3}{z_2-z_3}:\dfrac{z_1-z_4}{z_2-z_4}$ вещественно.

Задача 0.6. Пусть двойное отношение четырех точек равно λ. Какие двойные отношения можно получить, меняя порядок этих точек? Какие перестановки всегда сохраняют двойное отношение?

Задача 0.7. а) Четырехугольник $Z_3Z_1Z_2Z_4$ вписанный тогда и только тогда, когда

$$|(Z_1,Z_2;Z_3,Z_4)|+|(Z_1,Z_3;Z_2,Z_4)|=1.$$

б) Выведите отсюда *теорему Птолемея*: четырехугольник $ABCD$ вписанный тогда и только тогда, когда произведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон, т. е.

$$AB\cdot CD-AC\cdot BD+BC\cdot AD=0.$$

Задача 0.8. Пусть X_{ij} и X'_{ij} — точки пересечения окружностей C_i и C_j. Тогда если точки X_{12}, X_{23}, X_{34}, X_{41} лежат на одной окружности, то и точки X'_{12}, X'_{23}, X'_{34}, X'_{41} лежат на одной окружности или прямой (см. рис. справа).