Задачи по группам и алгебрам Ли – 1.

Зачет по данному листку ставится в случае сдачи 80% пунктов задач без звездочки. Пункт со звездочкой заменяет 2 пункта без звездочки. Дедлайн 24 сентября.

Группой Ли называется гладкое многообразие G, наделенное структурой группы так, что отображения умножения $G \times G \to G,\ (g,h) \mapsto gh$ и взятия обратного $G \to G,\ g \mapsto g^{-1}$ гладкие.

1. Покажите, что следующие группы являются группами Ли, указав явно какой-нибудь гладкий атлас: **а)** $\mathbb{R}^n$ по сложению; **б)** S^1; **в)** $S^1 \times S^1$; **г)** вообще, прямое произведение групп Ли; **д)** $GL_n(\mathbb{R})$. *Указание:* $GL_n(\mathbb{R})$ есть открытое подмножество в векторном пространстве матриц, на котором операция умножения билинейна (а следовательно, гладка). **е)** группа обратимых верхнетреугольных матриц; **ж)** группа верхнетреугольных матриц с единицами на диагонали; **з)** группа движений евклидовой плоскости $\mathbb{R}^2$; **и***) группа движений плоскости Лобачевского L^2; **к***) группа движений сферы Римана S^2.

2. а) Пусть G – группа Ли, $g \in G$ – произвольный ее элемент. Докажите, что отображения левого сдвига $L_g : G \to G,\ h \mapsto gh$, правого сдвига $R_g : G \to G,\ h \mapsto hg$ и сопряжения $C_g : G \to G,\ h \mapsto ghg^{-1}$ являются диффеоморфизмами. **б)** Выпишите эти диффеоморфизмы явно в глобальной координате на группе Ли $GL_n(\mathbb{R})$.

3. а) Пусть G – группа Ли. Докажите, что связная компонента единицы G° является в ней нормальной подгруппой. **б)** Докажите, что факторгруппа G/G° дискретна. **в)** Найдите G/G° для $G = GL_n(\mathbb{R})$. **г)** Найдите G/G° для группы движений евклидовой плоскости.

4. Докажите, что связная группа Ли порождается любым своим открытым подмножеством. *Указание:* погруппа, порожденная данным открытым подмножеством, сама открыта. Следовательно, открыт и любой смежный класс по этой подгруппе. Следовательно, эта же подгруппа замкнута.

Подгруппа $H \subset G$ называется *подгруппой Ли* в группе Ли G, если H является гладким подмногообразием в G.

5. Опишите все подгруппы Ли в группе Ли **а)** $\mathbb{R}$; **б)** $\mathbb{R}^2$; **в)** S^1; **г)** $S^1 \times \mathbb{R}$; **д)** $S^1 \times S^1$.

Действием группы Ли G на многообразии M называется такое действие группы G на множестве M, что отображение $G \times M \to M$, переводящее $(g, m) \in G \times M$ в gm, гладко.

6. Докажите, что для всякого элемента $g \in G$ отображение $m \mapsto gm$ является диффеоморфизмом многообразия M.

7. Для следующих действий групп Ли на многообразиях докажите, что эти действия гладки, и опишите явно орбиты и стабилизаторы точек: **а)** тавтологическое действие группы $GL_n(\mathbb{R})$ на пространстве $\mathbb{R}^n$; **б)** тавтологическое действие группы SO_n на пространстве $\mathbb{R}^n$; **в)** действие группы $GL_n(\mathbb{R})$ на пространстве $n\times n$-матриц $Mat_n(\mathbb{R})$ слева; **г)** действие группы $GL_n(\mathbb{R})\times GL_n(\mathbb{R})$ на пространстве $n\times n$-матриц $Mat_n(\mathbb{R})$ слева и справа; **д)** действие группы $GL_n(\mathbb{R})$ на пространстве $n \times n$-матриц $Mat_n(\mathbb{R})$ сопряжениями; **е***) действие группы $GL_n(\mathbb{R})$ на пространстве симметрических билинейных форм на пространстве $\mathbb{R}^n$ заменами базиса; **ж***) действие группы $GL_n(\mathbb{R})$ на пространстве кососимметрических билинейных форм на пространстве $\mathbb{R}^n$ заменами базиса.

8. а) Задайте ортогональную группу $O_n(\mathbb{R})$ как множество нулей системы квадратичных уравнений на пространстве $n\times n$-матриц. **б)** Пользуясь теоремой о неявном отображении, докажите, что в окрестности единицы $O_n(\mathbb{R})$ является гладким подмногообразием в $Mat_n(\mathbb{R})$. **в)** Найдите касательное пространство в единице к этому многообразию как подпространство в $Mat_n(\mathbb{R})$. **г)** пользуясь диффеоморфизмами левого сдвига, докажите, что $O_n(\mathbb{R})$ является гладким многообразием (в каждой своей точке). **д)** Докажите, что группа $O_n(\mathbb{R})$ компактна. **е)** Опишите связные компоненты этой группы.

9*. а) Докажите, что следующие группы являются группами Ли: $SL_n(\mathbb{R})$, $SO_n(\mathbb{R})$, U_n, SU_n, $Sp_{2n}(\mathbb{R})$. **б)** Найдите размерности этих групп Ли. *Указание к пунктам а-б:* аналогично предыдущей задаче, найдите касательные пространства к этим группам в единице. **в)** Какие из этих групп Ли связны? **г)** Какие из них компактны?

10. Приведите пример **а)** 2-мерной неабелевой группы Ли, **б)** неабелевой группы Ли, диффеоморфной $\mathbb{R}^3$, **в)** неабелевой группы Ли, диффеоморфной $S^1 \times \mathbb{R}^2$, **г***) группы Ли, диффеоморфной трехмерной сфере S^3.

11*. а) Докажите, что группа $SO_3(\mathbb{R})$ проста. **б)** Найдите все подгруппы Ли в группе $SO_3(\mathbb{R})$. **в)** Найдите все нормальные подгруппы Ли в группе движений плоскости. **г)** Найдите все подгруппы Ли в группе движений плоскости.