Задачи по группам и алгебрам Ли – 4. Представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$.

Для получения оценки “10” по данному листку 80% пунктов задач без звездочки. Пункт со звездочкой заменяет 2 пункта без звездочки. Дедлайн 12 ноября.

1. а) Докажите, что на всякой группе Ли G есть единственная с точностью до пропорциональности левоинвариантная дифференциальная форма старшей степени. *Указание:* такая форма однозначно определяется своим значением в точке $e \in G$. Эта форма называется *мерой Хаара* и обозначается dg. **б)** Выпишите эту форму явно в координатах для группы Ли $\mathbb{R}$; **в)** для группы Ли S^1; **г*)** для группы Ли $GL_n(\mathbb{R})$.

2. а) Докажите, что одномерное вещественное представление связной компактной группы Ли тривиально. **б)** Докажите, что на связной компактной группе Ли всегда есть дифференциальная форма старшей степени, инвариантная относительно как левого, так и правого действия. *Указание:* рассмотрите старшую внешнюю степень присоединенного представления и воспользуйтесь пунктом а).

Характером представления V группы Ли G называется функция χ_V на G, такая что $\chi_V(g) := \mathrm{tr}_V\, g$. Как и для конечных групп, характер является функцией, постоянной на классах сопряженности. Для компактной группы Ли G корректно определено скалярное произведение характеров $(\chi_V, \chi_W) := \frac{1}{\int_G dg} \int_G \chi_V(g)\overline{\chi_W}(g)dg$.

3. Докажите, что $\chi_{V\oplus W} = \chi_V + \chi_W$ и $\chi_{V\otimes W} = \chi_V \chi_W$.

4. а) Докажите, что всякое комплексное представление компактной группы Ли вполне приводимо. *Указание:* для компактной группы можно воспроизвести стадартное доказательство теоремы Машке для конечных групп, заменив суммирование по группе на интеграл по мере Хаара (сходящийся благодаря компактности). **б)** Докажите, что характеры неприводимых комплексных представлений компактной группы Ли образуют ортонормированную систему в пространстве всех ее характеров. *Указание:* это, опять же, повторение стандартного доказательства для конечных групп с заменой суммы на интеграл.

5. Опишите все функции на окружности S^1, являющиеся характерами конечномерных комплексных представлений группы S^1.

6. а) Докажите, что всякое представление алгебры Ли $\mathfrak{su}_2$ в комплексном векторном пространстве однозначно продолжается до представления алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. *Указание:* в алгебре Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ матрицы Паули тоже образуют базис. **б)** Докажите, что всякое конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{su}_2$ однозначно продолжается до представления группы Ли SU_2. **в)** Докажите, что всякое конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ вполне приводимо. *Указание:* согласно пунктам а) и б), конечномерное представление $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ является представлением компактной группы SU_2.

Зафиксируем стандартные образующие $e = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$, такие, что $[e,f] = h,\ [h,e] = 2e,\ [h,f] = -2f$.

7. а) Докажите, что на всяком конечномерном представлении алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ оператор $h \in \mathfrak{sl}_2$ действует полупросто (т.е. диагонализуемо)с целыми собственными значениями. *Указание:*

элемент $ih \in \mathfrak{sl}_2$ является касательным вектором к компактной однопараметрической подгруппе $S^1 \subset SL_2(\mathbb{C})$. **б)** Пусть V – конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$, и $V(\lambda)$ – собственное попространство для оператора h с собственным значением λ. Докажите, что $eV(\lambda) \subset V(\lambda{+}2)$, а $fV(\lambda) \subset V(\lambda{-}2)$. **в)** Докажите, что в пространстве V есть вектор v, такой, что $hv = \lambda v$ и $ev = 0$. Такие векторы называются *особыми векторами веса* λ. **г)** Пусть $v \in V$ – особый вектор. Докажите, что подпространство в V, натянутое на векторы вида $f^k v$, $k \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, инвариантно, и выпишите действие оператора e на векторрах $f^k v$. **д)** Докажите, что представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$, порожденное особым вектором веса λ, неприводимо и имеет размерность $\lambda+1$. Это представление обычно обозначается V_λ и называется представлением со старшим весом λ. Соответственно, едиственный с точностью до пропорциональности особый векторв V_λ называется старшим вектором. **е)** Докажите, что для каждого $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ существует единственное неприводимое представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ размерности n. *Указание:* докажите, что всякое такое неприводимое представление изоморфно V_{n-1}.

8. а) Докажите, что всякий характер группы SU_2 однозначно определяется своими значениями на подгруппе диагональных матриц $S^1 \subset SU_2$. *Указание:* всякий класс сопряженности содержит диагональную матрицу. **б)** Докажите, что ограничение всякого характера группы SU_2 на подгруппу S_1 является характером группы S^1, инвариантным относительно обращения $g \mapsto g^{-1}$.

9. а) Пусть V – конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$. Докажите, что характер V как представления компактной группы SU_2 равен $\chi_V(q) := \sum\limits_{\lambda\in\mathbb{Z}} q^\lambda \dim V(\lambda)$, где q – глобальная координата на группе $S^1 = \{\begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix} \mid q \in \mathbb{C},\ |q| = 1\}$ диагональных матриц из SU_2. **б)** Вычислите характер неприводимого представления V_λ. **в)** Докажите, что всякое конечномерное представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ однозначно определяется своим характером.

10. а) Разложите в прямую сумму неприводимых представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$ $V_\lambda \otimes V_\mu$. *Указание:* вычислите характер этого представления. **б)** Пусть $V_1 = \mathbb{C}^2$ – тавтологическое представление алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2$. Докажите, что $V_n = S^n V$ для любого $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$. **в)** Найдите кратность вхождения тривиального представления V_0 в разложение тензорной степени $V_1^{\otimes n}$.

11*. а) Опишите все неприводимые представления группы Ли $SO_3(\mathbb{R})$. *Указание:* воспользуйтесь гомоморфизмом $SU_2 \to SO_3(\mathbb{R})$. **б)** Разложите в прямую сумму неприводимых представление $SO_3(\mathbb{R})$ в пространстве полиномиальных функций на сфере S^2 (т.е. в пространстве $\mathbb{R}[x,y,z]/(x^2{+}y^2{+}z^2{-}1)$). *Указание:* вычислите характер представления группы $SO_3(\mathbb{R})$ в пространстве полиномиальных функций степени не выше данной.