Топология-2, семинар 5, 08.17.2015.

Задача 1. Докажите следующее утверждение, известное как *лемма о пяти гомоморфизмах.* Пусть дана коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccccccc} A_1 & \longrightarrow & A_2 & \longrightarrow & A_3 & \longrightarrow & A_4 & \longrightarrow & A_5 \\ \downarrow{\scriptstyle f_1} & & \downarrow{\scriptstyle f_2} & & \downarrow{\scriptstyle f_3} & & \downarrow{\scriptstyle f_4} & & \downarrow{\scriptstyle f_5} \\ B_1 & \longrightarrow & B_2 & \longrightarrow & B_3 & \longrightarrow & B_4 & \longrightarrow & B_5 \end{array}$$

абелевых групп с точными строками. Тогда

а) если f_2 и f_4 – мономорфизмы, а f_1 – эпиморфизм, то f_3 – мономорфизм;

б) если f_2 и f_4 – эпиморфизмы, а f_5 – мономорфизм, то f_3 – эпиморфизм.

Таким образом, если f_1, f_2, f_4, f_5 – изоморфизмы, то f_3 – изоморфизм.

Задача 2. Для отображения $f\colon S^n \to S^n$, $n > 0$, индуцированный гомоморфизм $f_*\colon H_n(S^n) \to H_n(S^n)$ есть отображение $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot d} \mathbb{Z}$ умножения на некоторое целое число d. Это число называется *степенью отображения* f и обозначается $\deg f$.

Докажите следующие свойства степени:

а) $\deg \mathrm{id} = 1$.

б) $\deg f = 0$, если отображение $f\colon S^n \to S^n$ не сюръективно.

в) Если отображения f и g гомотопны, то $\deg f = \deg g$. (Верно и обратное утверждение: если $\deg f = \deg g$, то f и g гомотопны. Это эквивалентно утверждению $\pi_n(S^n) \cong \mathbb{Z}$ и известно как *теорема Хопфа.* В курсе Топология-1 это было доказано для $n \leqslant 2$.)

г) $\deg(f \circ g) = \deg f \cdot \deg g$.

д) Если $f\colon S^n \to S^n$ – симметрия относительно гиперплоскости, например, $f(x_0, \ldots, x_n) = (-x_0, x_1, \ldots, x_n)$, то $\deg f = -1$.

е) Антиподальное отображение $-id\colon S^n \to S^n, x \mapsto -x$, имеет степень $(-1)^{n+1}$.

Задача 3. Докажите, что на сфере S^n существует непрерывное поле ненулевых касательных векторов тогда и только тогда, когда n нечетно.

Задача 4. Говорят, что группа G *действует* на пространстве X, если для каждого элемента $g \in G$ задано непрерывное отображение $\alpha_g\colon X \to X$ такое, что $\alpha_e = \mathrm{id}$ (тождественное отображение) и $\alpha_{gh} = \alpha_g \circ \alpha_h$ (композиция). Действие группы G на X называется *свободным*, если для любого $g \neq e$ и $x \in X$ выполнено $\alpha_g(x) \neq x$.

Докажите, что для четного n единственной нетривиальной группой, которая может действовать свободно на S^n, является $\mathbb{Z}_2$.

Задача 5. Для любых $n > 0$ и $k \in \mathbb{Z}$ постройте отображение $f\colon S^n \to S^n$ степени k.

Задача 6. Вычислите гомологии произведения сфер $S^n \times S^n$ при $n \geqslant 2$.