Топология-2, семинар 7, 12.11.2015.

Задача 1. Напомним, что $[X, Y]$ обозначает множество классов гомотопных отображений $X \to Y$. Докажите, что пространства X, Y гомотопически эквивалентны, если для любого Z существует взаимно однозначное соответствие $\varphi^Z \colon [Z, X] \to [Z, Y]$, которое естественно по Z. Последнее означает, что для любого отображения $h \colon Z \to Z'$ диаграмма

$$\begin{tikzcd} {[Z,X]} \arrow[r, "\varphi^Z"] & {[Z,Y]} \\ {[Z',X]} \arrow[u, "h^*"] \arrow[r, "\varphi^{Z'}"] & {[Z',Y]} \arrow[u, "h^*"'] \end{tikzcd}$$

коммутативна.

Задача 2. Докажите, что пространства X, Y слабо гомотопически эквивалентны, если для любого клеточного пространства Z существует взаимно однозначное соответствие $\varphi^Z \colon [Z, X] \to [Z, Y]$, которое естественно по Z.

Задача 3. Приведите пример слабо гомотопически эквивалентных пространств X, Y, для которых не существует ни слабой гомотопической эквивалентности $f \colon X \to Y$, ни слабой гомотопической эквивалентности $g \colon Y \to X$.

Задача 4. Пусть D^2_+ и D^2_- — верхняя и нижняя замкнутые полусферы в S^2, и N — северный полюс. Убедитесь, что $\pi_3(S^2, D^2_+) \cong \mathbb{Z}$, а $\pi_3(S^2 \setminus N, D^2_+ \setminus N) = 0$. Аналогично, $\pi_3(S^2, D^2_+) \cong \mathbb{Z}$, а $\pi_3(D^2_-, D^2_- \cap D^2_+) = 0$. Таким образом, свойство вырезания не выполнено для $\pi_3(S^2, D^2_+)$.

Задача 5. Докажите, что для любой n-связной клеточной пары (X, A) существует клеточное пространство Z, получаемое из A приклеиванием клеток размерности $> n$, и гомотопическая эквивалентность $Z \to X$, неподвижная на A.

Задача 6. Докажите, что приклеивающее отображение $w \colon S^{k+l-1} \to S^k \vee S^l$ для $(k + l)$-клетки произведения $S^k \times S^l$ задаётся композицией

$$S^{k+l-1} = \partial(D^k \times D^l) = D^k \times S^{l-1} \cup_{S^{k-1} \times S^{l-1}} S^{k-1} \times D^l \to S^k \vee S^l,$$

где последнее отображение состоит из двух проекций

$$D^k \times S^{l-1} \to D^k \to D^k/S^{k-1} = S^k \hookrightarrow S^k \vee S^l \quad \text{и}$$
$$S^{k-1} \times D^l \to D^l \to D^l/S^{l-1} = S^l \hookrightarrow S^k \vee S^l$$

и переводит $S^{k-1} \times S^{l-1}$ в отмеченную точку.

Задача 7. Убедитесь, что произведение Уайтхеда $\pi_1(X) \times \pi_1(X) \to \pi_1(X)$ — это коммутатор.

Задача 8. Докажите, что для $\alpha \in \pi_k(X)$ и $\beta, \gamma \in \pi_l(X)$ с $l > 1$ имеет место соотношение $[\alpha, \beta + \gamma]_w = [\alpha, \beta]_w + [\alpha, \gamma]_w$.

Задача 9. Докажите, что для $\alpha \in \pi_k(X)$ и $\beta \in \pi_l(X)$ с $k, l > 1$ имеет место соотношение $[\alpha, \beta]_w = (-1)^{kl}[\beta, \alpha]_w$.

Задача 10. Докажите, что при подходящем выборе изоморфизма сопряжения $t \colon \pi_n(X) \to \pi_{n-1}(\Omega X)$ произведения Уайтхеда и Самельсона связаны соотношением $t[\alpha, \beta]_w = (-1)^{k-1}[t\alpha, t\beta]_s$ для $\alpha \in \pi_k(X)$ и $\beta \in \pi_l(X)$. Выведите свойства а)–в) произведения Самельсона (билинейность, градуированную антикоммутативность и градуированное тождество Якоби) из соответствующих свойств произведения Уайтхеда.

Задача 11. Обозначим через ι_n каноническую образующую группы $\pi_n(S^n)$ и через η_2 — каноническую образующую группы $\pi_3(S^2)$, т. е. класс отображения Хопфа $S^3 \to S^2$. Покажите, что $[\iota_2, \iota_2]_w = 2\eta_2$.

Задача 12. Пусть $\alpha \in \pi_k(X)$ и $\beta \in \pi_l(X)$. Докажите, что произведение Уайтхеда $[\alpha, \beta]_w$ лежит в ядре гомоморфизма надстройки $\Sigma \colon \pi_{k+l-1}(X) \to \pi_{k+l}(\Sigma X)$.

В частности, если X — $(n-1)$-связное клеточное пространство, то произведения Уайтхеда $[\alpha, \beta]_w$ классов $\alpha, \beta \in \pi_n(X)$ лежат в ядре гомоморфизма надстройки $\Sigma \colon \pi_{2n-1}(X) \to \pi_{2n}(\Sigma X)$ в «пограничной» размерности, который является эпиморфизмом согласно теореме Фрейденталя. «Трудная часть» теоремы Фрейденталя утверждает, что ядро этого эпиморфизма порождено классами вида $[\alpha, \beta]_w$.

Задача 13. Докажите, что если X — топологическая группа, то $[\alpha, \beta]_w = 0$ для любых $\alpha \in \pi_k(X)$ и $\beta \in \pi_l(X)$. Это обобщает тот факт, что фундаментальная группа топологической группы коммутативна.