

Задача 1. Покажите, что пространства S^2 и $S^3 \times CP^\infty$ имеют одинаковые гомотопические группы, но разные группы гомологий.

Задача 2. Покажите, что пространства $S^m \times RP^n$ и $S^n \times RP^m$ имеют одинаковые гомотопические группы, но при $m \neq 1$, $n \neq 1$, $m \neq n$ их группы гомологий различны.

Задача 3. Покажите, что пространства $S^1 \vee S^1 \vee S^2$ и $S^1 \times S^1$ имеют одинаковые группы гомологий, но разные гомотопические группы.

Задача 4. Докажите, что $\pi_4(S^3) \cong \mathbb{Z}_2$ или 0. (Указание: рассмотрите гомоморфизм надстройки $\pi_3(S^2) \rightarrow \pi_4(S^3)$ и используйте задачи 11 и 12 из листка 7). Трудная часть теоремы Фрейденгала даёт $\pi_1^s = \pi_4(S^3) \cong \mathbb{Z}_2$.

Задача 5. Докажите следующую относительную теорему Гуревича: если пара (X, A) является $(n - 1)$ -связной, $n \geq 2$, а пространство A односвязно и непусто, то $H_i(X, A) = 0$ при $i < n$ и $h: \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow H_n(X, A)$ — изоморфизм.

Задача 6. Приведите пример $(n - 1)$ -связной пары (X, A) , $n \geq 2$, с неодносвязным A , для которой $h: \pi_n(X, A, x_0) \rightarrow H_n(X, A)$ не является изоморфизмом.

Задача 7. Покажите, что проекция

$$S^1 \times S^1 \rightarrow (S^1 \times S^1)/(S^1 \vee S^1) = S^2$$

индуцирует тривиальный гомоморфизм в гомотопических группах, но нетривиальный гомоморфизм в группах гомологий.

Задача 8. Покажите, что проекция $p: S^3 \rightarrow S^2$ расслоения Хопфа индуцирует тривиальный гомоморфизм в группах гомологий, но нетривиальный гомоморфизм в гомотопических группах.