Топология-2, семинар 9, 26.11.2015.

Задача 1. Вычислите $\pi_n(S^1 \vee S^n)$.

Задача 2. Докажите, что для любого $n > 0$ и любой группы π, которая должна быть абелевой при $n > 1$, существует клеточное пространство X, для которого $\pi_n(X) = \pi$ и $\pi_i(X) = 0$ при $i \neq n$. Такое пространство X называется *пространством Эйленберга-Маклейна* и обозначается $K(\pi, n)$.

Задача 3. Убедитесь, что $K(\mathbb{Z}, 1) \cong S^1$, $K(\mathbb{Z}_2, 1) \cong \mathbb{R}P^\infty$, $K(\mathbb{Z}, 2) \cong \mathbb{C}P^\infty$, а также что все двумерные поверхности, за исключением S^2 и $\mathbb{R}P^2$, являются пространствами типа $K(\pi, 1)$.

Задача 4. Пусть X – связное клеточное пространство. Докажите, что существует цепочка пространств и отображений $\{X_1 \leftarrow X_2 \leftarrow X_3 \leftarrow \ldots\}$ и отображений $f_n\colon X \to X_n$, коммутирующих с приведенной выше диаграммой и удовлетворяющих следующим условиям:

- $\pi_j(X_n) = 0$ при $j > n$.
- отображения f_n индуцируют изоморфизм групп π_i при $i \leqslant n$.

Эта диаграмма (вместе с отображениями f_n) называется *башней Постникова* для X.

Задача 5. Докажите, что гомотопическим слоем отображения $X_n \to X_{n-1}$ в башне Постникова является пространство типа $K(\pi, n)$, где $\pi = \pi_n(X)$.

Задача 6. Пусть $\alpha \in \pi_k(X)$ и $\beta \in \pi_l(X)$. Докажите, что произведение Уайтхеда $[\alpha, \beta]_w$ лежит в ядре гомоморфизма Гуревича $h\colon \pi_{k+l-1}(X) \to H_{k+l-1}(X)$.

Задача 7. Докажите, что если X односвязно и $H_i(X) \simeq H_i(S^n)$ для любого n, то $X \cong S^n$.

Задача 8. Покажите, что условие односвязности пространств X и Y в теореме 4.17 существенно.

Задача 9. Приведите отображения связных клеточных пространств $f\colon X \to Y$, для которого $f_*\colon \pi_1(X) \to \pi_1(Y)$ – изоморфизм и $f_*\colon H_n(X) \to H_n(Y)$ – изоморфизм для любого n, но f не является гомотопической эквивалентностью. (Можно доказать, что такое отображение f будет гомотопической эквивалентностью, если группы $\pi_1(X)$ и $\pi_1(Y)$ абелевы и действуют тривиально на высших гомотопических группах).