Листок 1. Теория Струн, НМУ 2016

(Сканы/фото решений данного листка принимаются
на e-mail:)

Упражнение 1: Проверьте, что действие для частицы

$$S[x^\mu(\tau)] = -m \int_0^1 d\tau \sqrt{\left(\frac{dx^\mu}{d\tau}\right)^2} \tag{0.1}$$

инвариантно относительно репараметризаций $\tau \to f(\tau)$, $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, при которых $x^\mu(\tau) \to \tilde{x}^\mu(\tau) = x^\mu(f(\tau))$.

Упражнение 2: Проверьте, что действие Намбу-Гото для струны

$$S_{\mathrm{NG}}[X^\mu(\xi^1, \xi^2)] = -T \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{\det\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a}\frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^b}\right)} \tag{0.2}$$

инвариантно относительно репараметризаций $\xi^a \to f^a(\xi^1, \xi^2)$, $a = 1, 2$.

Задача 1: Покажите, что действия Полякова и Намбу-Гото

$$S_{\mathrm{P}}[g, X^\mu] = \int d^2\xi \sqrt{g} g^{ab} \eta_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a}\frac{\partial X^\nu}{\partial \xi^b}, \quad S_{\mathrm{NG}}[X^\mu(\xi^1, \xi^2)] = -T \int d\xi^1 d\xi^2 \sqrt{\det\left(\frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^a}\frac{\partial X^\mu}{\partial \xi^b}\right)} \tag{0.3}$$

классически эквивалентны. Здесь $\eta_{\mu\nu} = (-1, 1, \ldots, 1)$ — метрика плоского пространства Минковского, а $g_{ab}(\xi^1, \xi^2)$ — динамическая метрика на мировом листе.

Упражнение 3: Найдите тензор энергии-импульса T_{ab} в теории двумерного свободного безмассового скалярного поля

$$S[\varphi] = \frac{1}{2} \int d^2x (\partial_a \varphi)^2 \,. \tag{0.4}$$

Введите комплексные координаты $z = x^1 + ix^2$, $\bar{z} = x^1 - ix^2$. Как связаны T_{zz}, $T_{\bar{z}\bar{z}}$ с T_{ab} в обычных координатах. Чему эквивалентно условие сохранения $\partial_a T_{ab} = 0$ в терминах комплексных координат $z, \bar{z}$?

Задача 2: Рассмотрим двумерную евклидову теорию свободного скалярного поля $\varphi^\mu(z, \bar{z})$, где $\mu = 0, ..., d-1$, и мы уже перешли к комплексным координатам $z = x^1 + ix^2$ и $\bar{z} = x^1 - ix^2$, в дальнейшем мы для краткости будем писать скалярное поле как $\varphi^\mu(z)$ [1]. Пропагатор такого поля есть

$$\langle \varphi^\mu(z_1) \varphi^\nu(z_2) \rangle = -\eta^{\mu\nu} \log |z_{12}|^2, \tag{0.5}$$

где $z_{12} = z_1 - z_2$. Для начала определим понятие нормального упорядочения с помощью рекурсионного уравнения

$$: \varphi^{\mu_1}(z_1) ... \varphi^{\mu_n}(z_n) : \varphi^\mu(z) =: \varphi^{\mu_1}(z_1) ... \varphi^{\mu_n}(z_n) \varphi^\mu(z) : + \sum_{i=1}^n : \varphi^{\mu_1}(z_1) \overset{\hat{i}}{...} \varphi^{\mu_n}(z_n) : \langle \varphi^{\mu_i}(z_i) \varphi^\mu(z) \rangle, \tag{0.6}$$

здесь индекс $\hat{i}$ над многоточием означает, что из нормального произведения исключен i-тый множитель. Также мы подразумеваем, что $: \varphi^\mu(z) := \varphi^\mu(z)$.

(а). Покажите, что нормальное упорядочение может быть записано как

$$: \mathcal{F} := \exp\big(\frac{1}{2}\int d^2z_1 d^2z_2 \log|z_{12}|^2 \frac{\delta}{\delta\varphi^\mu(z_1)}\frac{\delta}{\delta\varphi_\mu(z_2)}\big)\mathcal{F}, \tag{0.7}$$

где $\mathcal{F}$ любой функционал от φ.

(б). Выведите формулу

$$\begin{aligned} &:\varphi^{\mu_1}(z_1)...\varphi^{\mu_m}(z_m)::\varphi^{\nu_1}(w_1)...\varphi^{\nu_n}(w_n):= \\ &= \sum_{k=0}^{\min(m,n)} \sum_{\substack{1\leqslant i_1<...<i_k\leqslant m \\ 1\leqslant j_1<...<j_k\leqslant n}} :\varphi^{\mu_1}(z_1)\overset{\hat{i}_1...\hat{i}_k}{...}\varphi^{\mu_m}(z_m)\ \varphi^{\nu_1}(w_1)\overset{\hat{j}_1...\hat{j}_k}{...}\varphi^{\nu_n}(w_n):\prod_{l=1}^{k}\langle\varphi^{\mu_{i_l}}(z_{i_l})\varphi^{\nu_{j_l}}(w_{j_l})\rangle, \end{aligned} \tag{0.8}$$

или, что в краткой форме есть

$$:\mathcal{F}::\mathcal{G}:=\exp\big(-\int d^2z_1 d^2z_2 \log|z_{12}|^2 \frac{\delta}{\delta\varphi^\mu_{\mathcal{F}}(z_1)}\frac{\delta}{\delta\varphi_{\mathcal{G}\mu}(z_2)}\big):\mathcal{F}\mathcal{G}:, \tag{0.9}$$

где одна функциональная производная действует только на $\mathcal{F}$, а другая только на $\mathcal{G}$.

(в). Используя пункт **(б)**, покажите, что

$$:e^{i\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{\varphi}(z_1)}::e^{i\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{\varphi}(z_2)}:=|z_{12}|^{2\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{p}_2}:e^{i\boldsymbol{p}_1\boldsymbol{\varphi}(z_1)+i\boldsymbol{p}_2\boldsymbol{\varphi}(z_2)}: \tag{0.10}$$

и далее, что

$$\langle V_{\boldsymbol{p}_1}(z_1)....V_{\boldsymbol{p}_n}(z_n)\rangle = \prod_{i<j}^{n}|z_i-z_j|^{2\boldsymbol{p}_i\boldsymbol{p}_j}, \tag{0.11}$$

где $V_{\boldsymbol{p}}(z) =: e^{i\boldsymbol{p}\boldsymbol{\varphi}(z)}:$.

(г). Покажите, что операторное разложение (OPE) между голоморфной частью тензора энергии-импульса $T(z) = -\frac{1}{2}:\partial_z\varphi^\mu\partial_z\varphi_\mu:$ и вертексным оператором $V_{\boldsymbol{p}}(z)$ есть

$$T(z)V_{\boldsymbol{p}}(u) = \frac{\Delta_{\boldsymbol{p}}}{(z-u)^2} + \frac{1}{z-u}\partial_z V_{\boldsymbol{p}}(z) + \text{reg.}, \tag{0.12}$$

где $\Delta_{\boldsymbol{p}} = \frac{1}{2}\boldsymbol{p}^2$, здесь $\partial_z = \frac{\partial}{\partial z}$, а reg. — регулярные члены, которые не сингулярны в пределе $z \to u$. Также покажите, что

$$\begin{aligned} T(z)T(u) &= \frac{c}{2(u-z)^4} + \frac{2T(u)}{(u-z)^2} + \frac{\partial_u T(u)}{u-z} + \text{reg.} \\ \frac{\partial\varphi^\mu(z)}{\partial z}\frac{\partial\varphi^\nu(u)}{\partial u} &= \frac{\delta^{\mu\nu}}{z-u} + \text{reg.} \end{aligned} \tag{0.13}$$

Чему равен центральный заряд c в данном случае?

Задача 3: Определим действие операторов a_n и L_n на локальное поле $A(z,\bar{z})$ по формулам

$$a_n A(z,\bar{z}) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i}\oint_z du (u-z)^n \frac{\partial\varphi(u)}{\partial u} A(z,\bar{z})\,, \tag{0.14}$$

$$L_n A(z,\bar{z}) \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i}\oint_z du (u-z)^{n+1} T(u) A(z,\bar{z})\,, \tag{0.15}$$

при этом предполагается, что в определении $a_n A(z,\bar{z})$ и $L_n A(z,\bar{z})$ внутри контура вокруг точки z не попадают другие поля. Покажите, что коммутационные соотношения для операторов a_n и L_n даются формулами

$$[a_n, a_m] = n\delta_{n,-m}\,, \tag{0.16}$$

$$[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{1}{12}(n^3 - n)\delta_{n,-m}\,, \tag{0.17}$$

$$[L_n, a_m] = -m a_{n+m}\,. \tag{0.18}$$

Для этого используйте (0.13), где индекс μ принимает только одно значение, то есть здесь мы рассматриваем только одно скалярное поле $\varphi(z,\bar{z})$. Алгебра с генераторами a_n называется алгеброй Гейзенберга, а алгебра с генераторами L_n называется алгеброй Вирасоро.

Задача 4: Используя результаты Задачи 3, покажите, что

$$a_n V_k(z) = 0, \quad n > 0\,, \quad a_0 V_k(z) = k V_k(z)\,, \tag{0.19}$$

$$L_n V_k(z) = 0, \quad n > 0\,, \quad L_0 V_k(z) = \frac{k^2}{2} V_k(z)\,, \tag{0.20}$$

где $V_k(z) = e^{k\varphi(z)}$. Данные действия кратко записываются, как $a_0|k\rangle = k|k\rangle$, и.т.д.

Задача 5: Покажите, что

$$L_n = \frac{1}{2}\sum_n :a_m a_{n-m}: \quad n \neq 0 \tag{0.21}$$

$$L_0 = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}a_n\,. \tag{0.22}$$

Используйте эти формулы, чтобы показать, что

$$L_0(a_{-n_1}\ldots a_{-n_N}\ldots|k\rangle) = \Big(\frac{k^2}{2} + \sum_{\{n_i\}} n_i\Big) a_{-n_1}\ldots a_{-n_N}\ldots|k\rangle\,. \tag{0.23}$$

Пространство порожденное векторами $\{a_{-n_1}\ldots a_{-n_N}\ldots|k\rangle\}$ называется Фоковским пространством и обозначается F_k.

Задача 6: Определим оператор уровня состояния как $\hat{N} \overset{\text{def}}{=} L_0 - \frac{k^2}{2}$. И пусть $P(N)$ есть число состояний на уровне N. Покажите, что для Фоковского пространста верно

$$\chi_B(q) \overset{\text{def}}{=} \mathrm{Tr}_{F_k} q^{\hat{N}} = \sum_{N=0}^{\infty} P(N) q^N = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^n}\,. \tag{0.24}$$

Задача 7: Действие Полякова (0.3) ковариантно относительно преобразований Лоренца и трансляций в таргет пространстве ("target“ space):

$$X^\mu(\xi) \to \Lambda^\mu_\nu X^\nu(\xi)\,, \quad X^\mu(\xi) \to X^\mu(\xi) + A^\mu\,, \tag{0.25}$$

то есть ковариантно относительно группы Пуанкаре. Используя теорему Нетер, выведите явный вид генераторов группы Пуанкаре P^μ и $J^{\mu\nu}$. Запишите выражение для этих генераторов через операторы a_n^μ.

Список литературы

[1] Польчинский, Д. *Теория струн*, том 1, параграф 2, стр 31.