Листок 4. Теория Струн. НМУ 2016

Задача 1: Используя OPE (Operator Product Expansion) из Задачи 5 Листка 3, выведите коммутаторы

$$\begin{aligned}
&\{b_n^\mu, b_m^\nu\} = \eta^{\mu\nu}\delta_{n+m,0}\,,\\
&[L_n, L_m] = (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0}\,,\\
&[L_n, G_m] = \frac{(n-2m)}{2}G_{n+m}\,,\\
&\{G_n, G_m\} = 2L_{n+m} + \frac{c}{12}(4n^2-1)\delta_{n+m,0}\,,
\end{aligned} \tag{0.1}$$

где генераторы определены как

$$\begin{aligned}
b_n^\mu A(z) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i}\oint_z (u-z)^{n-\frac{1}{2}}\psi^\mu(u)A(z)\,,\\
L_n A(z) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i}\oint_z (u-z)^{n+1}T(u)A(z)\,,\\
G_n A(z) &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\pi i}\oint_z (u-z)^{n+\frac{1}{2}}G(u)A(z)
\end{aligned} \tag{0.2}$$

Задача 2: Используя (0.1) покажите, что в Рамоновском секторе из унитарности следует, что для размерности Δ примарного поля Φ_Δ должно выполняться неравенство $\Delta \geqslant \frac{c}{24}$. Состояние с $\Delta = \frac{c}{24}$ называется R-вакуумом.

Задача 3: Вакуум в NS секторе задается уравнениями

$$a_n^\mu|0,k\rangle = 0, \quad b_r^\mu|0,k\rangle = 0, \quad a_0^\mu|0,k\rangle = k^\mu|0,k\rangle\,, \quad \text{где} \quad n>0,\ r \geqslant \frac{1}{2}\,. \tag{0.3}$$

Общий вид состояния можно записать как

$$a_{-n_1}^{\mu_1}a_{-n_2}^{\mu_2}\ldots b_{-r_1}^{\nu_1}b_{-r_2}^{\nu_2}\ldots|0,k\rangle\,. \tag{0.4}$$

Эти вектора образуют векторное пространство NS алгебры. Назовем уровнем

$$N = \sum n_i + \sum r_i \tag{0.5}$$

и пусть $P(N)$ число состояний на уровне N. Покажите, что

$$\chi_{\text{NS}}(q) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{N=0}^\infty P(N)q^N = \frac{\prod_{r=1/2}^\infty (1+q^r)^d}{\prod_{n=1}^\infty (1-q^n)^d}\,. \tag{0.6}$$

Задача 4: Покажите, что $L_0 = N + \frac{1}{2}(k^\mu)^2$.

Задача 5: Покажите, что генераторы группы Лоренца $\hat{J}^{\mu\nu} = \int J_0^{\mu\nu} d\xi^1$ (см. Упр 1 из Листка 3) действуют на основные состояния R-вакуума $|0,k,\vec{s}\rangle$ как

$$\hat{J}^{\mu\nu}|0,k,\vec{s}\rangle = \frac{1}{8}[\Gamma^\mu,\Gamma^\nu]_{\vec{s}}^{\vec{s}'}|0,k,\vec{s}'\rangle\,. \tag{0.7}$$

Задача 5: Пусть размерность пространства-времени d есть четное число. Введем $d/2$ скалярных бозонных полей $H_k(z)$, где $k = 0, 1, \dots \frac{d}{2} - 1$, OPE которых имеет вид

$$H_k(u)H_{k'}(z) = -\delta_{kk'} \log(u - z)\,. \tag{0.8}$$

Покажите, что экспоненты от этих полей $\psi_k^{\pm}(z) \stackrel{\text{def}}{=} e^{\pm i H_k(z)}$ удовлетворяют

$$\begin{aligned}
&\psi_k^{+}(u)\psi_{k'}^{-}(z) = \frac{\delta_{kk'}}{u - z} + \text{н.с.}\,,\\
&\psi_k^{\pm}(u)\psi_{k'}^{\pm}(z) = \begin{cases} \mathcal{O}(u - z), & k = k' \\ \mathcal{O}(1), & k \neq k' \end{cases}
\end{aligned} \tag{0.9}$$

А также покажите, что NSR фермионные поля ψ^μ связанны с фермионными полями $\psi_k^{\pm}$ соотношениями

$$\psi_0^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm\psi^0 + \psi^1), \quad \psi_a^{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi^{2a} \pm i\psi^{2a+1}), \quad a = 1, \dots, \frac{d}{2} - 1\,. \tag{0.10}$$

Задача 6: Покажите, что вертекс

$$V(z, k, \vec{s}) \stackrel{\text{def}}{=} S_{\vec{s}}(z) e^{i k_\mu X^\mu(z)}\,, \tag{0.11}$$

где $S_{\vec{s}}(z) \stackrel{\text{def}}{=} \exp\left(i \sum_{k=0}^{d/2} s_k H_k\right)$ и $\vec{s} = (s_0, \dots, s_{d/2})$, а $s_k = \pm 1/2$, удовлетворяет соотнощениям

$$\begin{aligned}
&a_n^\mu V(z, k, \vec{s}) = b_n^\mu V(z, k, \vec{s}) = 0, \quad a_0^\mu V(z, k, \vec{s}) = k^\mu V(z, k, \vec{s}), \quad n > 0,\\
&b_0^\mu V(z, k, \vec{s}) = (\Gamma^\mu)_{\vec{s}}^{\vec{s}'} V(z, k, \vec{s}')\,,
\end{aligned} \tag{0.12}$$

то есть является Рамоновским вакуумным состоянием. Поле $S_{\vec{s}}(z)$ называется “Спиновым полем”.

Задача 7: Покажите, что в R-секторе производящая функция для числа состояний (характер) дается формулой

$$\chi_{\mathrm{R}}(q) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{N=0}^{\infty} P_d^R(N) q^N = 2^{\frac{d}{2}} \frac{\prod_{n=0}^{\infty}(1 + q^n)^d}{\prod_{n=0}^{\infty}(1 - q^n)^d}\,. \tag{0.13}$$

Задача 8: Покажите, что генераторы L_n и G_n выражаются через генераторы a_n и b_n как

$$\begin{aligned}
&L_n = \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z}} : a_m^\mu a_{n-m}^\mu : + \frac{1}{2} \sum_{m \in \mathbb{Z} + \nu} : b_m^\mu b_{n-m}^\mu : + a\delta_{n,0}\,,\\
&G_n = \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m^\mu b_{n-m}^\mu\,,
\end{aligned} \tag{0.14}$$

где $\nu = 0$ в R-секторе и $\nu = 1/2$ в NS секторе, а

$$a = \begin{cases} 0, & \text{в NS-секторе} \\ \frac{d}{16}, & \text{в R-секторе}\,. \end{cases} \tag{0.15}$$