Функции от операторов

Задача 10.1. Найдите жорданов базис и нормальную форму для оператора а) $\begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$ (над $\mathbb{C}$); б) $\dfrac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]$; в) Δ на $\mathbb{R}[x]$ $(\Delta P(x) = P(x) - P(x-1))$.

Задача 10.2. Если A — нильпотентный оператор ($A^N = 0$ для некоторого N), то $E + A$ — обратимый оператор.

Задача 10.3. Если оператор A (на векторном пространстве над $\mathbb{C}$) невырожден, то из него можно извлечь корень k-й степени.

Задача 10.4. Вычислите экспоненту (сумму ряда $E + A + A^2/2 + A^3/6 + \ldots$) от а) жордановой клетки; б) оператора $\lambda\dfrac{d}{dx}$ на $\mathbb{R}[x]$; в) матрицы $\begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ -\lambda & 0 \end{pmatrix}$.

Задача 10.5*. Сопоставьте предыдущую задачу с задачей 9.2 и выразите коэффициенты многочлена $S_k(n) := 1^k + \ldots + n^k$ через коэффициенты ряда $\dfrac{x}{1-e^{-x}} =: \sum\limits_{n\geqslant 0} B_n \dfrac{x^n}{n!}$ (числа B_i называют *числами Бернулли*).

Задача 10.6. $\det\exp(A) = \exp(\operatorname{tr} A)$; в частности, экспонента матрицы с нулевым следом («матрицы из sl») — матрица с единичным определителем («из SL»).

Задача 10.7. Пусть характеристический многочлен оператора A имеет корни λ_i кратности k_i. Тогда если $f^{(n)}(\lambda_i) = g^{(n)}(\lambda_i)$ при $n < k_i$, то $f(A) = g(A)$.