

## 6

**6.1.** Придайте точный смысл утверждению *в ультраметрическом пространстве все треугольники – равнобедренные*. Докажите это утверждение.

**6.2.** Придайте точный смысл утверждению *в ультраметрическом пространстве любая точка круга – его центр*. Докажите это утверждение.

**6.3.** Пусть  $\|\cdot\|_1$  и  $\|\cdot\|_2$  – две нормы на поле  $\mathbb{F}$ . Докажите, что эти нормы определяют одну и ту же топологию тогда и только тогда, когда существует такое вещественное число  $\alpha$ , что  $\|x\|_1 = \|x\|_2^\alpha$  для всех  $x \in \mathbb{F}$ .

**6.4\*.** Пусть  $\mathbb{F}$  – нормированное поле нулевой характеристики; будем использовать вложение  $\mathbb{N} \hookrightarrow \mathbb{F}$ . Докажите, что, если  $\mathbb{N}$  лежит в единичном круге поля  $\mathbb{F}$ , то поле  $\mathbb{F}$  неархимедово. (**Подсказка.** Оцените  $\|x + y\|^N$  через  $\max(\|x\|, \|y\|)$  для как угодно большого  $N \in \mathbb{N}$ ).

**6.5\*.** (Снова складные квадраты). Сколько решений в кольце

$$\mathbb{Z}_{10} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_5$$

имеет уравнение  $x^2 = x$ ? Дайте определения решениям ...376 и ...625. Периодичны ли знаки этих решений?

**6.6.** Докажите, что сумма  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$  определена в  $\mathbb{Q}_p$  тогда и только тогда, когда  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 0$ .

**6.7.** Вычислите 5 знаков  $\sqrt{-7} \in \mathbb{Q}_2$ .

**6.8.** Вычислите 4 знака  $\pm\sqrt{-1} \in \mathbb{Q}_{13}$ .

**6.9.** Докажите сходимость  $p$ -адического ряда

$$\text{Log}_p(1+x) := \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}$$

в  $p$ -адическом единичном круге  $\|x\|_p < 1$ . Установите тождество  $\text{Log}_p[(1+x)(1+y)] \equiv \text{Log}_p(1+x) + \text{Log}_p(1+y)$ .

**6.10.** Докажите сходимость  $p$ -адического ряда

$$\text{Exp}_p(x) := \sum_{n=0}^{\infty} (-1) \frac{x^n}{n!}$$

в  $p$ -адическом круге  $\|x\|_p < p^{-\frac{1}{p-1}}$ . Установите тождество  $\text{Exp}_p(x+y) \equiv \text{Exp}_p(x)\text{Exp}_p(y)$ . Осуществляют ли отображения  $\text{Log}_p$  и  $\text{Exp}_p$  изоморфизмы каких-либо групп?

3 ноября, Г.Б. Шабат