НМУ, Математический анализ (1-й семестр). Листок 6. 21 октября 2016 г.

Формула Тейлора и исследование функции

$1^{\times}$. Разложите в $x_0 = 0$ следующие функции по формуле Тейлора с остаточным членом $O(x^n)$ (а) e^x и a^x; (б) $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ и $\operatorname{sh} x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$; (в) $\cos x$ и $\sin x$; (г) $(1+x)^{\alpha}$.

$2^{\times}$. Напишите первые n членов разложения Тейлора при $x_0 = 0$ для следующих функций (а) $\ln(1+x)$; (б) $\operatorname{arctg} x$; (в) $\arcsin x$; (г) $\frac{1}{1-2x+2x^2}$.

3. Выпишите первые три члена разложения Тейлора при $x_0 = 0$ для следующих функций (а) $\frac{1}{\cos x}$; (б) $e^{\sin x}$; (в) $\sqrt{\cos x}$.

4. Как выражаются разложения Тейлора функций $f+g$, fg; f^{-1}; $f\circ g$ через разложения Тейлора функций f и g?

5. Найдите 2016-ю производную $f^{(2016)}(0)$ функции

$$f(x) = \sin(x^{812} + x^{602}).$$

6. Вычислите пределы: (а) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}\right)$; (б) $\lim_{x\to 0}\frac{1-(\cos x)^{\sin x}}{x^3}$; (в) $\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\operatorname{sh} x)-\operatorname{sh}(\sin x)}{x^7}$.

7. Найдите рекуррентную формулу для вычисления коэффициентов a_k в разложении

$$\operatorname{tg} x = \sum_{k=0}^{n}\frac{a_k}{k!}x^k + o(x^n), \quad x\to 0.$$

(*Указание:* $(\operatorname{tg} x)' = \operatorname{tg}^2 x + 1$.)

8. Докажите правило Лопиталя. Пусть $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ и $g:(a,b)\to\mathbb{R}$ дифференцируемы на (a,b) и $g'(x)\neq 0$, $x\in(a,b)$ и $\frac{f'(x)}{g'(x)}\to A$, $x\to a+0$. Тогда, если $f(x)\to 0$ и $g(x)\to 0$ при $x\to a+0$, то

$$\frac{f(x)}{g(x)}\to A, \quad x\to a+0.$$

Функция $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ называется выпуклой вниз (вверх), если для любых двух точек $x_1, x_2\in(a,b)$ и любых положительных α_1, α_2 таких, что $\alpha_1+\alpha_2 = 1$, выполнено следующее неравенство

$$f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \leqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2) \quad \left(f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \geqslant \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2)\right).$$

Если при всех $x_1, x_2, \alpha_1, \alpha_2$ выполнены строгие неравенства, то говорят о строгой выпуклости.

9. Докажите, что график выпуклой вниз функции лежит выше любой касательной к нему.

10. Докажите, что выпуклая вниз функция непрерывна в любой точке своей области определения (за исключением, возможно, крайних точек).

11. (а) Докажите, что функция $x\mapsto e^x$ выпукла вниз.

(б) Выведите отсюда неравенство Коши между средним арифметическим и средним геометрическим

$$\frac{x_1+\ldots+x_n}{n}\geqslant \sqrt[n]{x_1\cdot\ldots\cdot x_n}.$$

12^{*}. Пусть $f\in C^n(\mathbb{R})$ – n раз непрерывно дифференцируемая на $\mathbb{R}$ функция. Пусть $M_0 = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f(x)|$ и $M_n = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f^{(n)}(x)|$ – конечные величины, а $M_k = \sup_{x\in\mathbb{R}}|f^{(k)}(x)|$, $1\leqslant k\leqslant n-1$. Покажите, что

(а) при $n=2$ выполнено $M_1\leqslant\sqrt{2M_0M_2}$;

(б) в пункте (а) $\sqrt{2}$ не может быть замененен меньшим числом;

(в) при $n>2$ выполнено $M_k\leqslant 2^{k(n-k)/2}M_0^{1-k/n}M_n^{k/n}$.

Задачи с крестиками “$\times$” ненужно сдавать, если вы ранее знали их решения.