

Интеграл, плоские параметрические кривые

1. Найдите неопределенные интегралы: (а) $\int x^\alpha dx$; (б) $\int \ln x dx$; (в) $\int x^2 e^x dx$.

2. Используя интеграл, найдите пределы:

$$(a) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n}{(n+1)^2} + \dots + \frac{n}{(2n)^2} \right); (b) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1^\alpha + \dots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}, \alpha > 0; (v) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n}.$$

3. Докажите, что, если существует $I_1 = \int_a^b f(x)dx$, то существует $I_2 = \int_a^b |f(x)|dx$ и $I_1 \leq I_2$.

4. Докажите, что монотонная и ограниченная на отрезке функция интегрируема на этом отрезке.

5. Покажите, что функция $f \in C^1[a, b]$ может быть представлена как разность двух неубывающих функций.

6. Пусть $D(x)$ и $R(x)$ – функции Дирихле и Римана, соответственно. Существуют ли интегралы $\int_a^b D(x)dx$ и $\int_a^b R(x)dx$? Если существуют, то чему они равны?

Рассмотрим отображение $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$. Предположим, что $x(t)$ и $y(t)$ дифференцируемы достаточно раз, их производные по t обозначим $\dot{x}(t)$, $\dot{y}(t)$. Вектор $v(t) = \dot{\gamma}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$ называется вектором скорости. Отображение γ называется гладкой кривой, если $v(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$.

7. Найдите уравнение касательной к кривой γ в точке $(x(t_0), y(t_0))$, $t_0 \in (a, b)$. Напомним, что касательной называется такая прямая L , что расстояние от точки $(x(t), y(t))$ до L равно $o(t - t_0)$, $t \rightarrow t_0$.

Длиной кривой $\gamma[a, b]$ называется число $l_\gamma = \int_a^b \|v(t)\| dt$, $\|v(t)\| = \sqrt{\dot{x}^2(t) + \dot{y}^2(t)}$.

8. Докажите, что при допустимой смене параметризации длина кривой не меняется, то есть, если $h : [\alpha, \beta] \rightarrow [a, b]$, $h(\alpha) = a$, $h(\beta) = b$, $h'(\tau) > 0$, $\tau \in [\alpha, \beta]$, то $l_{\gamma \circ h} = l_\gamma$.

9. (а) Пусть плоская кривая задана уравнением $y = f(x)$, $x \in [a, b]$. Докажите, что длина кривой равна

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

(б) Докажите, что длина кривой $r = r(\varphi)$, $\varphi \in [a, b]$, заданной в полярных координатах, равна

$$s = \int_a^b \sqrt{r^2(\varphi) + (r')^2(\varphi)} d\varphi.$$

10. Найдите длину (а) единичной окружности; (б) участка параболы.

11. Покажите, что на всякой гладкой кривой γ можно ввести параметр s , такой, что $s = l_\gamma[0, s]$. Такой параметр называется *натуральным*. Докажите, что параметр t – натуральный тогда и только тогда, когда $\|\dot{\gamma}(t)\| \equiv 1$.

12. Пусть s – натуральный параметр кривой $\gamma(s)$. Положим: $v(s) = \gamma'(s)$, $a(s) = v'(s)$. Докажите, что векторы $v(s)$ и $a(s)$ перпендикулярны.

13. Функция $\kappa(s) = |a(s)|$ называется *кривизной* кривой γ . Положим, что $n(s) = a(s)/\kappa(s)$. Докажите, что $n'(s) = -\kappa(s)v(s)$ (*формула Френе*).

14. Пусть кривизна кривой γ в точке $\gamma(s_0)$ отлична от нуля, то есть $\kappa(s_0) \neq 0$. Найдите окружность S , для которой $\|\gamma(s) - S(s)\| = o((s - s_0)^2)$. Предполагается, что s – натуральный параметр окружности S .