Экзамен

Оценка за курс будет учитывать результаты экзамена и сданные задачи из листков. Экзамен, как и задачи из листков, можно сдавать до 28 декабря включительно. Решения нужно отправлять на aokunev@list.ru.

Задача 3.1. Бывает ли такой диффеоморфизм компакта, что у него бесконечно много а) гиперболических неподвижных точек б) гиперболических неподвижных точек, и все периодические точки гиперболичны в) гиперболических периодических точек, и все периодические точки гиперболичны.

Задача 3.2. Приведите пример диффеоморфизма с неподвижной точкой a, такой что

- все собственные значения в этой точке не равны ± 1,
- диффеоморфизм в окрестности a не эквивалентен своей линейной части (т.е. не сопряжен с ней гомеоморфизмом).

Задача 3.3. Рассмотрим такой гомеорфизм $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, что $F(x) > x$ для всех x. Докажите, что F сопряжен сдвигу $x \mapsto x + 1$ (замена координат должна быть гомеоморфизмом).

Задача 3.4. Диффеоморфизм F_1 в окрестности неподвижной точки a_1 и диффеоморфизм F_2 в окрестности неподвижной точки a_2 сопряжнены гомеоморфизмом. Выберите эти диффеоморфизмы так, чтобы между ними не было а) гладкого сопряжения б*) $\frac{1}{100}$-гельдерова сопряжения.

Задача 3.5. Рассмотрим непрерывное отображение какого-нибудь многообразия. Докажите, что: а) если у отображения есть плотная орбита, то орбита топологически типичной точки плотна. б) если отображение эргодично относительно меры Лебега, то у него есть плотная орбита.

Задача 3.6. Пусть у диффеоморфизма Аносова F замкнутого связного многообразия неблуждающее множество совпадает со всем фазовым пространством. Докажите, что F транзитивен.

Задача 3.7. Рассмотрим множество всех C^1-гладких отображений отрезка $[0, 1]$ с всюду положительной производной. Введем на нем C^1 топологию :

$$dist(f, g) = \sup_{x\in[0,1]} |f'(x) - g'(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f(x) - g(x)|.$$

Докажите, что отображения, все неподвижные точки которых гиперболичны, образуют открытое всюду плотное подмножество.

Задача 3.8*. Придумайте диффеоморфизм двумерной сферы с SRB-мерой, дополнение до бассейна притяжения которой имеет хаусдорфову размерность 2. Указание. Поможет тщательная оценка хаусдорфовой размерности канторовых множеств нулевой меры.

Квадрат разделен на пять горизонтальных и пять вертикальных равных прямоугольников. Второй снизу горизонтальный прямоугольник сжимается в пять раз по горизонтали, растягивается в пять раз по вертикали и налагается на второй слева вертикальный прямоугольник. Аналогично, четвертый снизу горизонтальный прямоугольник отображается на четверый слева вертикальный прямоугольник. Полученное отображение объединения прямоугольников на свой образ называется *подковой Смейла* и обозначается f. Каждой точке x, для которой определены все (положительные и отрицательные) итерации отображения f соответсвует последовательность нулей и единиц, k-й член которой равен нулю, если $f^k(x)$ принадлежит нижнему прямоугольнику-прообразу, и 1, если верхнему. Эта последовательность называется *судьбой* точки.

Задача 3.9. Докажите, что f сопряжено сдвигу влево

$$\sigma : \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \to \{0,1\}^{\mathbb{Z}},\ \sigma(\omega)_k = \omega_{k+1}.$$

Утверждением этой задачи далее можно пользоваться без доказательства.

Задача 3.10. Докажите, что f транзитивно.

Задача 3.11. Опишите судьбы всех точек подковы, являющихся гомоклиническими для ее неподвижных точек.