Транзитивность, число вращения

Задача 1.1. Рассмотрим диффеоморфизм $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, такой что $F(0) = 0$. Тогда его дифференциал в нуле D_0F переводит $\mathbb{R}^n = T_0\mathbb{R}^n$ в себя. Верно ли, что

а) Если все D_0F-орбиты ограничены, то F-орбиты всех близких к 0 точек ограничены?

б) Если все D_0F-орбиты стремятся к 0, то F-орбиты всех близких к 0 точек стремятся к нулю?

Задача 1.2. Отображение $F : X \to X$ называется *транзитивным*, если найдется точка $x \in X$, имеющая *плотную* положительную полуорбиту (т.е. замыкание множества $\{F^n(x), x \in \mathbb{N}\}$ равно всему X). Докажите, что следующие отображения транзитивны:

а) удвоение окружности

$$x \mapsto 2x,\ x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z};$$

б) иррациональный поворот окружности

$$x \mapsto x + a,\ x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z},\ a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q};$$

в*) при каких условиях на a_1 и a_2 транзитивен сдвиг двумерного тора

$$(x_1, x_2) \mapsto (x_1 + a_1, x_2 + a_2),\ x \in \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2?$$

Задача 1.3. Пусть $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} = \mathbb{S}^1$ – проекция. Для сохраняющего ориентацию гомеоморфизма окружности $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ определим его *поднятие* как гомеоморфизм $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такой что $\pi \circ F = f \circ \pi$.

Докажите, что любые два поднятия отличаются прибавлением целого числа: найдется $k \in \mathbb{Z}$, такое что $F_1(x) = F_2(x) + k$ для всех $x \in \mathbb{R}$.

Задача 1.4. Пусть $f : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$ — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм, а F — его поднятие. Для точки $x \in \mathbb{R}$ определим

$$\rho(F, n, x) = \frac{F^n(x) - x}{n}, \quad \rho(F, x) = \lim_{n\to\infty} \rho(F, n, x).$$

а) Пусть $\rho(F, x)$ существует для всех x. Докажите, что $\rho(F, x)$ не зависит от выбора точки x, а $\rho(f) = \pi(\rho(F, x)) \in \mathbb{S}^1$ не зависит от выбора поднятия F. Число $\rho(f)$ называют *числом вращения* гомеоморфизма f.

б) Докажите, что $\rho(f)$ рационально, если и только если у f есть периодическая орбита.

в*) Докажите, что $\rho(F, x)$ существует для всех x.