Гомоклинические точки, соленоид

Гомоклинические точки

Рассмотрим следующее отношение на множестве гиперболических периодических седел диффеоморфизма F: $p \sim q$ тогда и только тогда, когда $W^u(O(p))$ трансверсально пересекает $W^s(O(q))$, а $W^s(O(p))$ трансверсально пересекает $W^u(O(q))$ (по непустому множеству).

Задача 2.1. Докажите, что $\sim$ является отношением эквивалентности.

Задача 2.2. а) Пусть p, q — гиперболические седла и $p \sim q$. Верно ли, что $W^s(p)$ трансверсально пересекает $W^u(q)$?

б) Пусть p — гиперболическое седло, $O(p)$ — его орбита, $p_1, p_2 \in O(p)$ и $W^u(p_1)$ трансверсально пересекается с $W^s(p_2)$. Верно ли, что найдется точка, отличная от p, в которой $W^u(p)$ и $W^s(p)$ пересекаются, и притом трансверсально?

Гомоклиническим классом гиперболического седла p называется замыкание множества эквивалентных ему седел: $H(p, F) = \overline{\{q \mid q \sim p\}}$. Альтернативное определение: гомоклинический класс — это замыкание множества трансверсальных гомоклинических точек орбиты p, т.е. $H(p, F) = \overline{W^u(O(p), F) \pitchfork W^s(O(p), F)}$. ($A \pitchfork B$ — это множество точек из $A \cap B$, в котором A и B пересекаются трансверсально)

Задача 2.3. Докажите эквивалентность двух определений гомоклинического класса.

Соленоид Смейла-Вильямса

Рассмотрим полноторие (внутренность тора). Точку полнотория будем задавать углом $\varphi \in S^1 = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ и точкой единичного круга $z \in \mathbb{C}, |z| < 1$. Определим отображение полнотория в себя:

$$f(\varphi, z) = \big(2\varphi, \frac{1}{5}z + \frac{1}{2}e^{i\varphi}\big).$$

Задача 2.4. Как выглядит образ полнотория под действием отображения f?

Задача 2.5. а) Как выглядит сечение образа плоскостью $\varphi = \varphi_0$?

б) Как изменяется сечение при изменении φ_0?

в) Те же вопросы для образа полнотория под действием квадрата отображения.

г) Как выглядит множество, для которого определены первые k итераций обратного к f отображения?

д) Назовем соленоидом множество точек полнотория, для которых определены все обратные итерации f. Как выглядит пересечение соленоида с плоскостью $\varphi = \varphi_0$? Что происходит при изменении угла?

Разобьем полноторие на половины $P_0 = \{(\varphi, z) : \varphi \in [0, \frac{1}{2})\}$ и $P_1 = \{(\varphi, z) : \varphi \in [\frac{1}{2}, 1)\}$. Точке x поставим в соответствие ее *судьбу* — последовательность нулей и единиц, у которой на n-м месте ноль, если $f^n(x) \in P_0$, и единица, если $f^n(x) \in P_1$.

Задача 2.6. Всякой ли судьбе соответствует точка полнотория?

Задача 2.7. Как по судьбе точки вычислить ее координаты $(\varphi; z)$?

Задача 2.8. Как выглядит множество точек, в судьбе которых фиксированы n первых символов в будущем и n в прошлом?

Задача 2.9*. Докажите, что соленоид — объединение некоторого множества а) непрерывных б) гладких кривых. Что происходит с кривыми под действием f?

Задача 2.10*. Пусть точка, двигаясь вдоль одной из кривых, сделала полный оборот вокруг полнотория. Как связаны значения z до и после обхода?

Задача 2.11*. Является ли соленоид а) связным б) линейно связным множеством?