

Многомерие.

- Г4♦1. Обозначим через A, B, C, D, E концы стандартных базисных векторов в \mathbb{R}^5 , а через X середину отрезка, соединяющего центры треугольников ABC и CDE . Проходящая через X прямая YZ имеет точку Y на прямой AE , а точку Z в плоскости BCD . Найдите $\overline{XY} : \overline{YZ}$.
- Г4♦2. Пусть точка p лежит строго внутри четырёхмерного симплекса $ABCDE$ из предыдущей задачи¹. Можно ли провести через точку p а) двумерную плоскость, не пересекающую ни одного ребра² б) прямую, не пересекающую ни одной двумерной грани³ этого симплекса?
- Г4♦3. В четырёхмерном аффинном пространстве \mathbb{A}^4 заданы непересекающиеся прямая $\ell = p + v \cdot t$ и двумерная плоскость $\Pi = q + U$, такие что $v \notin U$. Верно ли, что прямые (ab) с $a \in \ell, b \in \Pi$ заметают всё пространство \mathbb{A}^4 ?
- Г4♦4. В четырёхмерном аффинном пространстве \mathbb{A}^4 над бесконечным полем задано конечное множество двумерных аффинных плоскостей. Всегда ли найдётся двумерная плоскость, которая а) не пересекается ни с одной из них б) пересекает каждую из них в единственной точке?
- Г4♦5. Приведите пример конечномерного пространства W и трёх попарно трансверсальных подпространств $U, V, T \subset W$, таких что $\dim U + \dim V + \dim T = \dim W$, но $W \neq U \oplus V \oplus T$.
- Г4♦6. Пусть $\dim(U + V) = \dim(U \cap V) + 1$ для некоторых подпространств $U, V \subset V$. Обязательно ли $U + V$ равно одному из подпространств U, V , а $U \cap V$ — другому?
- Г4♦7. Пусть k -мерные подпространства $W_1, W_2, \dots, W_m \subset V$ таковы, что $\dim W_i \cap W_j = k - 1$ для всех $i \neq j$. Покажите, что существует либо $(k - 1)$ -мерное подпространство $U \subset V$, содержащееся во всех W_i , либо $(k + 1)$ -мерное подпространство $W \subset V$, содержащее все W_i .
- Г4♦8. Может ли а) векторное б) аффинное пространство над бесконечным полем оказаться объединением конечного числа подпространств меньшей размерности?
- Г4♦9. Сколько k -мерных векторных подпространств в n -мерном векторном пространстве над полем из q элементов? Найдите предел этого количества для фиксированных n и k и $q \rightarrow 1$.
- Г4♦10. Сколько k -мерных аффинных подпространств имеется в n -мерном аффинном пространстве над конечным полем из q элементов?
- Г4♦11. Может ли пересечение положительного ортанта⁴ в \mathbb{R}^4 с некоторой двумерной плоскостью быть квадратом в стандартной евклидовой структуре на \mathbb{R}^4 ?
- Г4♦12. При каких c четырёхмерный куб $I^4 \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^4 \mid \forall i |x_i| \leq 1\}$ пересекается с гиперплоскостью $\sum x_i = c$? Нарисуйте все трёхмерные многогранники, которые высекаются из куба такими гиперплоскостями. Если задача вызывает затруднения, потренируйтесь сначала на сечениях трёхмерного куба⁵ $I^3 \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \forall i |x_i| \leq 1\}$ гиперплоскостями $\sum x_i = c$ в \mathbb{R}^3 .
- Г4♦13. Нарисуйте развёртку трёхмерной поверхности четырёхмерного куба⁶ из предыдущей задачи и напишите инструкцию по склейке⁷ четырёхмерного куба из этой развёртки.
- Г4♦14. Нарисуйте какую-нибудь двумерную параллельную проекцию четырёхмерного куба, у которой все вершины различны.
- Г4♦15. В какой трёхмерный многогранник перейдёт I^4 при факторизации $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ по одномерному подпространству, порождённому суммой стандартных базисных векторов?

¹Т. е. является барицентрической комбинацией точек $ABCDE$ со строго положительными весами.

²Прямой, проходящей через какие-нибудь две вершины.

³Плоскости, проходящей через какие-нибудь три вершины.

⁴Множества всех $x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$ с $x_i \geq 0$ для всех i

⁵Алгебраически и те и другие сечения легко описываются в барицентрических координатах относительно треугольника (соотв. тетраэдра) с вершинами в точках пересечения плоскости с тремя (соотв. четырьмя) рёбрами куба, выходящими из вершины $(-1, -1, -1)$ (соотв. $(-1, -1, -1, -1)$)

⁶Она представляет собою трёхмерный многогранник, собранный из обычных трёхмерных кубиков.

⁷Укажите, какие пары двумерных граней трёхмерных кубов надлежит склеить друг с другом и как именно.

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1			
2а			
б			
3			
4а			
б			
5			
6			
7			
8а			
б			
9			
10			
11			
12			
13			
14			
15			