Выпуклые многогранные конусы

Г9◇1. Нарисуйте ограниченное замкнутое выпуклое множество с незамкнутым множеством
а) вершин **б)** крайних точек.

ВМК или *выпуклый многогранный конус* на векторах $v_1, v_2, \dots, v_m \in V \simeq \mathbb{R}^n$ это множество вида $\sigma = \sigma_{v_1 v_2 \dots v_m} = \{\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m \mid \forall i\ \lambda_i \geqslant 0\} \subset V$. Множество ковекторов $\sigma^\vee = \{\xi \in V^* \mid \forall v \in \sigma\ \xi(v) \geqslant 0\} \subset V^*$ называется *двойственным конусом* к вмк σ. Пересечения $\sigma \cap \mathrm{Ann}(\xi)$, где $\xi \in \sigma^\vee$, называются *гранями* σ. Грани, отличные от σ, называются собственными. Под *размерностью* вмк σ понимается размерность его линейной оболочки. Грани коразмерности 1 называются *гипергранями*. Для гиперграни τ n-мерного вмк σ мы обозначаем через $\xi_\tau \in \sigma^\vee$ базисный вектор в $\mathrm{Ann}\,\tau$.

Г9◇2. Покажите, что для любого вмк σ и любого вектора $w \notin \sigma$ существует $\xi \in \sigma^\vee$ с $\xi(w) < 0$.

Г9◇3. Покажите, что $\sigma = \{v \in V \mid \xi(v) \geqslant 0\ \ \forall \xi \in \sigma^\vee\}$.

Г9◇4. Покажите, что грани σ суть вмк и что грань грани и пересечение граней суть грани σ.

Г9◇5. Докажите эквивалентность друг другу следующих условий на вмк σ:
а) $\sigma \cap (-\sigma) = \{0\}$ **б)** $\sigma^\vee$ линейно порождает V^* **в)** $\exists\ \xi \in \sigma^\vee : \sigma \cap \mathrm{Ann}(\xi) = \{0\}$
г) σ не содержит ненулевых векторных подпространств из V.

Г9◇6. Покажите, что минимальная по включению грань σ есть $\sigma \cap (-\sigma)$.

Г9◇7. Докажите эквивалентность друг другу следующих условий на вмк σ и вектор $v \in \sigma$: **а)** линейная оболочка σ совпадает с $\{w - \lambda v \mid w \in \sigma,\ \lambda \geqslant 0\}$ **б)** $\forall\ \xi \in \sigma^\vee \smallsetminus \mathrm{Ann}(\sigma)\quad \xi(v) > 0$ **в)** v внутренняя точка[1] конуса σ **г)** $\forall w \in \sigma\ \exists u \in \sigma :\ u + w = \lambda v$ для некоторого $\lambda \in \mathbb{R}_{>0}$ **д)** $\sigma^\vee \cap \mathrm{Ann}(v) = \mathrm{Ann}(\sigma)$.

Г9◇8. Верно ли что σ и $\sigma^\vee$ имеют одинаковое число одномерных граней?

Г9◇9. Покажите, что выпуклое подмножество $\eta \subset \sigma$ является гранью тогда и только тогда, когда $\forall\ v_1, v_2 \in \sigma\ v_1 + v_2 \in \eta \Rightarrow v_1, v_2 \in \eta$.

Г9◇10. Покажите, что любая собственная грань $\tau \subsetneq \sigma$ **а)** содержится в некой гиперграни σ **б)** является пересечением всех содержащих её гиперграней σ.

Г9◇11. Для линейно порождающего V вмк $\sigma \neq V$ докажите, что **а)** $\partial\sigma$ является объединением гиперграней **б)** ковекторы $\xi_\tau \in V^*$, задающие гиперграни $\sigma \subset \tau$, содержатся в следующем конечном множестве Φ: перебираем все линейно независимые наборы из $(n-1)$ векторов v_ν; для каждого из них находим $\xi \in V^*$, порождающий его аннулятор; если ξ или $-\xi$ неотрицателен на всех v_i, включаем его (с нужным знаком) в Φ, если нет — то нет **в)** $\sigma = \bigcap\limits_{\tau} H^+_{\xi_\tau}$, где $\tau \subset \sigma$ пробегает все гиперграни σ **г)** $\sigma^\vee$ это тоже вмк.

Г9◇12. Покажите, что сопоставление грани $\tau \subset \sigma$ множества $\mathrm{Ann}(\tau) \cap \sigma^\vee \subset \sigma^\vee$ корректно задаёт обращающую включения биекцию между гранями σ и $\sigma^\vee$.

Г9◇13. Пусть $\xi \in \sigma^\vee$ и $\tau = \mathrm{Ann}(\xi) \cap \sigma$. Верно ли, что $\tau^\vee = \{\zeta - \lambda\xi \mid \zeta \in \sigma^\vee,\ \lambda \geqslant 0\}$?

Г9◇14. Пусть вмк σ_1 и σ_2 пересекаются по общей грани τ. Верно ли, что $\tau = \sigma_1 \cap \mathrm{Ann}(\xi) = \sigma_2 \cap \mathrm{Ann}(\xi)$ для некоторого $\xi \in \sigma_1^\vee \cap (-\sigma_2)^\vee$?

Г9◇15. Обозначим через $W \subset V$ линейную оболочку грани τ вмк $\sigma \subset V$. Покажите, что $\sigma + W$ является вмк в фактор пространстве V/W, причём его грани — это в точности $\eta + W$, где η пробегает все содержащие τ грани σ.

Г9◇16. Для любого выпуклого многогранника $M \subset \mathbb{A}(V)$ докажите, что
а) вмк, натянутый на все рёбра, выходящие из произвольной вершины M, содержит M
б) из любой вершины M можно пройти в любую другую, двигаясь только по рёбрам
в) если $\xi \in V^*$ ограничен на M, то $\max\limits_{x \in M} \xi(x)$ достигается в некоторой вершине $p \in M$
г) для того, чтобы $\xi(p) = \max\limits_{x \in M} \xi(x)$, необходимо и достаточно, чтобы $\xi \in V^*$ не увеличивал своего значения вдоль всех выходящих из p рёбер M.

[1] в топологии линейной оболочки конуса σ.

Персональный табель ________________________________ .
(напишите свои имя, отчество и фамилию)

Листок 9 (2 ноября)

№	дата сдачи	имя и фамилия принявшего	подпись принявшего
1а			
б			
2			
3			
4			
5а			
б			
в			
г			
6			
7а			
б			
в			
г			
д			
8			
9			
10а			
б			
11а			
б			
в			
г			
12			
13			
14			
15			
16а			
б			
в			
г			