

Задачи для подготовки к экзамену по группам и алгебрам Ли

Экзамен состоится в четверг 22 декабря с 17:30 до 19:30 в НМУ, ауд. 310. В каждом варианте будет 4 задачи, похожие на некоторые из приведенных ниже.

1. Пусть G – группа ортогональных линейных преобразований \mathbb{R}^n , сохраняющих упорядоченную пару вложенных (одно в другое) подпространств размерностей 2 и 4. **а)** Найдите размерность группы Ли G . **б)** Найдите число компонент связности этой группы Ли.
2. **а)** Найдите все связные подгруппы Ли в группе аффинных преобразований прямой \mathbb{R} . **б)** Какие из них нормальны?
3. Найдите все идеалы (т.е. подпространства в алгебре Ли, замкнутые относительно всех операторов $\text{ad } x$) алгебры Ли строго верхнетреугольных матриц 3×3 .
4. Найдите образ экспоненциального отображения для группы Ли из задачи 1 при $n = 3$.
5. Найдите центр универсальной обертывающей трехмерной алгебры Ли, заданной в базисе как $[x_1, x_2] = 2x_2$, $[x_1, x_3] = -x_3 + x_2$, $[x_2, x_3] = 0$.
6. Пусть V_λ – неприводимое представление алгебры Ли \mathfrak{sl}_2 со старшим весом λ . Разложите в прямую сумму неприводимых представление $S^2(V_5)$.
7. Пусть E, H, F – стандартный базис алгебры Ли $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$. Найдите все собственные значения элемента $EFH \in U(\mathfrak{sl}_2)$ в представлении алгебры Ли \mathfrak{sl}_2 со старшим весом 4.
8. Найдите все собственные значения элемента универсальной обертывающей алгебры $\sum_{i,j=1}^3 E_{ij}E_{ji} \in U(\mathfrak{gl}_3)$ в тензорном квадрате тавтологического представления $\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$.
9. Вычислите (выразите через элементарные симметрические функции) характер неприводимого представления унитарной группы U_4 со старшим весом $\lambda = (3, 2, 1, 0)$.
10. Найдите размерности неприводимых компонент в разложении на неприводимые представления \mathfrak{gl}_3 $S^2\mathbb{C}^3 \otimes \mathbb{C}^3$.