Задачи по группам и алгебрам Ли
листок 2, 6.10.2016

Для получения оценки 10 по данному листку необходимо сдать 80% пунктов задач (остальные оценки высчитываются пропорционально). Дедлайн 29 октября. Задачи, сданные после дедлайна, стоят на 25% меньше. Итоговая оценка вычисляется по формуле 0.7 средней оценки за листки + 0.7 оценки за экзаменационную работу.

1. Найдите касательные алгебры следующих групп Ли **а)** $SL(N,\mathbb{R})$, **б)** $SL(N,\mathbb{C})$, **в)** $PGL(N,\mathbb{R})$, **г)** $PGL(N,\mathbb{C})$, **д)** $O(N)$, **е)** $U(N)$, **ж)** $SU(N)$.

2. **а)** Выпишите операцию коммутатора в касательной алгебре группы $SO(3)$ в каком-нибудь базисе. **б)** Тот же вопрос для группы строго верхнетреугольных 3×3-матриц (группы Гейзенберга). **в)** Тот же вопрос для группы $SU(2)$.

3. **а)** Дайте определения подалгебры Ли, гомоморфизма алгебр Ли, изоморфизма алгебр Ли, идеала в алгебре Ли, факторалгебры Ли. Докажите теорему о гомоморфизме: образ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ при гомоморфизме $\mathfrak{g}\to\mathfrak{h}$ является подалгеброй Ли в $\mathfrak{h}$, изоморфной фактору алгебры Ли $\mathfrak{g}$ по ядру гомоморфизма. **б)** Опишите с точностью до изоморфизма все алгебры Ли над полем $\mathbb{R}$ размерности не выше 2. **в)** Приведите хотя бы три примера неизоморфных друг другу алгебр Ли над $\mathbb{R}$ размерности 3 с нетривиальной скобкой.

4. **а)** Докажите, что для группы Ли строго верхнетреугольных матриц (т.е. с единицами на диагонали) экспоненциальное отображение взаимно однозначно, и ряд для логарифма сходится везде. **б)** Покажите, что для этой группы операция умножения в канонических координатах задается полиномиальными формулами.

5. Докажите, что диффеоморфизм $M\to N$ многообразий порождает морфизм $\mathrm{Vect}(M)\to \mathrm{Vect}(N)$ алгебр Ли векторных полей.

6. Предположим, что группа Ли G гладко действует *справа* на многообразии M (это означает, что задано гладкое отображение $(m,g)\mapsto m.g$ из $M\times G$ в M, такое, что $(m.g_1).g_2 = m.(g_1g_2)$). **а)** Покажите, что это действие порождает морфизм алгебры Ли группы G в алгебру Ли векторных полей на M. **б)** Рассмотрим конкретный пример, в котором группа $G=GL(N,\mathbb{R})$ действует справа на пространстве $\mathbb{R}^N$, интерпретируемом как пространство векторов-строк. Найдите векторные поля на $\mathbb{R}^N$, отвечающие матричным единицам E_{ij}.

7. Задана группа Ли G и ее автоморфизм $\varphi: G\to G$. Обозначим через $G^\varphi\subset G$ подмножество элементов, неподвижных относительно φ. Докажите следующие утвереждения: **а)** Дифференциал $d\varphi$ является автоморфизмом алгебры Ли $\mathfrak{g}=Lie(G)$. **б)** G^φ является подгруппой Ли в G. **в)** Ее алгебра Ли состоит в точности из тех элементов $X\in\mathfrak{g}$, которые неподвижны относительно $d\varphi$.

8. Вещественная симплектическая группа $Sp(2N,\mathbb{R})$ определяется как подгруппа элементов в $GL(2N,\mathbb{R})$, сохраняющих невырожденную кососимметрическую форму. Докажите, что $Sp(2N,\mathbb{R})$ можно реализовать как подгруппу вида G^φ, где $G=GL(2N,\mathbb{R})$. Опишите в явном виде соответствующий автоморфизм φ.

9. Пусть A — конечномерная ассоциативная алгебра с единицей над $\mathbb{R}$. Докажите следующие утверждения: **а)** A можно реализовать как подалгебру в алгебре матриц. **б)** Множество $A^\times\subset A$ обратимых элементов открыто в A. **в)** $A^\times$ является группой Ли. **г)** Ее алгебру Ли можно отождествить с пространством A, в котором скобка задается коммутатором.

10. Пусть A – конечномерная алгебра над $\mathbb{R}$ (не обязательно ассоциативная). Линейное отображение $D: A\to A$ называется *дифференцированием* алгебры A, если выполняется правило Лейбница $D(ab)=D(a)\cdot b + a\cdot D(b)$. Докажите, что **а)** группа $Aut(A)$ автоморфизмов алгебры A является подгруппой Ли в $GL(A)$, **б)** множество $Der(A)$ всех дифференцирований является подалгеброй Ли в $End(A)$, и **в)** $Der(A)$ совпадает с алгеброй Ли группы $Aut(A)$.