Задачи по группам и алгебрам Ли
листок 3, 20.10.2016

Для получения оценки 10 по данному листку необходимо сдать 80% пунктов задач (остальные оценки высчитываются пропорционально). Дедлайн 12 ноября. Задачи, сданные после дедлайна, стоят на 25% меньше. Итоговая оценка вычисляется по формуле 0.7 средней оценки за листки + 0.7 оценки за экзаменационную работу.

Универсальной обертывающей алгеброй алгебры Ли $\mathfrak{g}$ называется пара $(U(\mathfrak{g}), \epsilon)$, где $U(\mathfrak{g})$ – ассоциативная алгебра с единицей, $\epsilon : \mathfrak{g} \to U(\mathfrak{g})$ – гомоморфизм алгебр Ли, обладающая следующим *универсальным свойством*: для любой ассоциативной алгебры A и гомоморфизма алгебр Ли $\varphi : \mathfrak{g} \to A$ существует единственный гомоморфизм ассоциативных алгебр $\tilde{\varphi} : U(\mathfrak{g}) \to A$, такой, что $\varphi = \tilde{\varphi} \circ \epsilon$.

1. а) Докажите, что универсальная обертывающая алгебра данной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ единственна с точностью до изоморфизма. **б)** Докажите, что всякое представление алгебры Ли $\mathfrak{g}$ однозначно продолжается до представления универсальной обертывающей алгебры $U(\mathfrak{g})$ (таким образом, теория представлений связной односвязной группы Ли, теория представлений ее алгебры Ли и теория представлений ее универсальной обертывающей алгебры – одно и то же).

2. Пусть $T(\mathfrak{g}) = \mathbb{C} \ \oplus \ \mathfrak{g} \ \oplus \ (\mathfrak{g} \otimes \mathfrak{g}) \ \oplus \ldots$ – тензорная алгебра пространства $\mathfrak{g}$ (т.е. свободная ассоциативная алгебра, порожденная пространством $\mathfrak{g}$) и пусть $J \subset T(\mathfrak{g})$ – двусторонний идеал, порожденный элементами $x \otimes y - y \otimes x - [x, y]$ для всех элементов $x, y \in \mathfrak{g}$. Докажите, что ассоциативная алгебра $U(\mathfrak{g}) := T(\mathfrak{g})/J$ с тождественным отображением $\epsilon : \mathfrak{g} \to \mathfrak{g} \subset T(\mathfrak{g})$ обладает требуемым универсальным свойством. *Указание:* иначе говоря, пусть $x_1, \ldots x_n$ – базис в алгебре Ли $\mathfrak{g}$ и пусть $[x_i, x_j] = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{ij}^k x_k$. Надо доказать, что $U(\mathfrak{g})$ есть ассоциативная алгебра с образующими $x_1, \ldots, x_n$ и определяющими соотношениями $x_i x_j - x_j x_i = \sum\limits_{k=1}^{n} c_{ij}^k x_k$, причем $\epsilon(x_i) = x_i$.

3. а) Докажите, что универсальная обертывающая алгебра абелевой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ есть алгебра полиномов $S(\mathfrak{g})$. **б)** Докажите, что универсальная обертывающая алгебра двумерной неабелевой алгебры Ли изоморфна подалгебре в алгебре дифференциальных операторов на прямой, порожденной операторами x и $x\frac{d}{dx}$.

4. Рассмотрим ассоциативную алгебру с образующими a, b, c и определяющими соотношениями $ab - ba = a$, $ac - ca = a$, $bc - cb = b$. Докажите, что в этой алгебре не выполняется теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта. А именно, мономы вида $a^k b^l c^m$ линейно порождают всю алгебру, но не являются линейно независимыми.

5. Рассмотрим ассоциативную алгебру A с единицей и двумя образующими p, q с определяющим соотношением $pq - qp = 1$. Докажите, что для A справедлива теорема Пуанкаре-Биркгофа-Витта. Указание: постройте представление алгебры A в пространстве полиномов от двух переменных.

6. Докажите, что центр алгебры A из предыдущей задачи тривиален.

7. Трехмерная алгебра Гейзенберга — это алгебра Ли с базисом X, Y, Z и скобкой $[X, Y] = Z$, $[X, Z] = [Y, Z] = 0$. Найдите центр ее универсальной обертывающей алгебры.

8. Та же задача, но для двумерной неабелевой алгебры Ли.

9. Для алгебры Ли $\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$ имеется естественное представление в пространстве $\wedge^k \mathbb{C}^N$, где $k = 0, \ldots, N$. Определите точно эти представления. Докажите, что они неприводимы.

10. Рассмотрим представление алгебры Ли $\mathfrak{gl}(N, \mathbb{C})$ в пространстве $\wedge^k \mathbb{C}^N$. Предполагая $N \geq 2$, ограничим это представление на подалгебру Ли $\mathfrak{gl}(N-1, \mathbb{C})$. Разложите полученное представление на неприводимые.