Задачи по группам и алгебрам Ли
листок 5, 24.11.2016

Для получения оценки 10 по данному листку необходимо сдать 80% пунктов задач (остальные оценки высчитываются пропорционально). Дедлайн 10 декабря. Задачи, сданные после дедлайна, стоят на 25% меньше. Итоговая оценка вычисляется по формуле 0.7 средней оценки за листки + 0.7 оценки за экзаменационную работу.

1. Рассмотрим $\mathfrak{gl}(N,\mathbb{C})$-модуль Верма M_λ с произвольным старшим весом $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_N) \in \mathbb{C}^N$. Докажите, что он является весовым модулем (т.е. обладает базисом из весовых векторов), что размерность любого весового подпространства $M_\lambda(\mu)$ конечна и зависит только от разности $\lambda - \mu$.

2. Предположим, что $\mathfrak{gl}(N, C)$-модуль M является тензорным произведением конечного числа некоторых $\mathfrak{gl}(N,\mathbb{C})$-модулей Верма. Докажите, что M является весовым модулем и что размерность любого весового подпространства $M(\mu)$ конечна.

3. Рассмотрим тавтологическое представление T алгебры Ли $\mathfrak{gl}(N,\mathbb{C})$ в пространстве $\mathbb{C}^N$. Определите соответствующее представление T_k в пространстве $S^k\mathbb{C}^N$ — k-й симметрической степени пространства $\mathbb{C}^N$, где $k = 0, 1, 2, \ldots$. Докажите, что T_k неприводимо.

4. Каков старший вес представления T_k из задачи 3?

5. Обозначим через $\chi_k(z_1, \ldots, z_N)$ характер представления T_k из задачи 3. Докажите, что

$$\chi_k(z_1, \ldots, z_N) = \sum_{k_1,\ldots,k_N \geq 0,\ k_1+\cdots+k_N=k} z_1^{k_1} \ldots z_N^{k_N}$$

и выведите отсюда тождество (производящий ряд)

$$\sum_{k=0}^{\infty} \chi_k(z_1, \ldots, z_N) w^k = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - z_i w}.$$

6. Рассмотрим сужение представления T_k (задача 3) на подалгебру $\mathfrak{gl}(N-1,\mathbb{C}) \subset \mathfrak{gl}(N,\mathbb{C})$, где $N \geq 2$. Опишите его разложение на неприводимые представления.

7. Рассмотрим неприводимые представления $V_0, V_1, V_2, \ldots$ алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ (напомним, что $\dim V_n = n+1$). Докажите, что

$$V_n \otimes V_m \sim V_{|n-m|} \oplus V_{|n-m+2|} \oplus \cdots \oplus V_{n+m}.$$

Указание: воспользуйтесь формулой для характера

$$\chi_{V_n}(z) = \frac{z^{n+1} - z^{-n-1}}{z - z^{-1}}.$$

8. Обозначим через L алгебру полиномов Лорана $f(z)$ от переменной z над полем $\mathbb{C}$, таких, что $f(z) = f(z^{-1})$. Докажите, что характеры неприводимых представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ образуют базис в L.

9. Введем в пространство L (задача 8) скалярное произведение по формуле

$$(f, g) := \frac{1}{4\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(z)\overline{g(z)} |z - z^{-1}|^2 d\theta, \qquad z = e^{i\theta}.$$

Докажите, что характеры неприводимых представлений алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ попарно ортогональны относительно этого скалярного произведения и имеют норму 1.

10. Вычислите кратность вхождения тривиального представления V_0 алгебры Ли $\mathfrak{sl}(2,\mathbb{C})$ в разложении представления $V_1^{\otimes k} = V_1 \otimes \cdots \otimes V_1$ (k-кратное тензорное произведение). Указание: примените результат задачи 9.