Расслоения и классифицирующие пространства

Задача 12.1. а) Нормальное расслоение к $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ тривиально.

б) Касательное расслоение к любой сфере становится тривиальным после прибавления тривиального одномерного расслоения.

в) Если среди чисел n_i есть нечетное, то касательное расслоение к $S^{n_1} \times \ldots \times S^{n_k}$ тривиально.

Задача 12.2. а) Пусть X — конечное клеточное пространство. Тогда вещественные одномерные расслоения на X классифицируются элементами группы $H^1(X; \mathbb{Z}/2)$, а комплексные одномерные расслоения — элементами группы $H^2(X; \mathbb{Z})$.

б*) Пусть X — замкнутое многообразие. Как геометрически реализовать класс, соответствующий данному расслоению?

в*) Какой операции над расслоениями соответствует сложение когомологий?

Задача 12.3. Пространство EG, построенное при помощи конструкции Милнора, стягиваемо.

Можно доказать, что это свойство в разумной степени определяет пространство BG: если на клеточном пространстве B есть главное G-расслоение со стягиваемым тотальным пространством, то B гомотопически эквивалентно BG.

Задача 12.4. а) Если пространство X имеет гомотопический тип $K(\pi, n)$, то ΩX имеет гомотопический типа $K(\pi, n-1)$.

б) Если топологическая группа G имеет гомотопический тип $K(\pi, n)$, то BG имеет гомотопический тип $K(\pi, n+1)$.

Более того, можно доказать, что для любой группы $\Omega BG \approx G$.