Торическая топология, ЭКЗАМЕН.

Задача 1. Пусть $B = \mathrm{diag}(b_i)$ — диагональная эрмитова матрица размера $n\times n$, $b_i \neq b_j$ при $i \neq j$. Пусть M_B : множество всех эрмитовых матриц размера $n \times n$, имеющих те же собственные значения, что и B. Иными словами, $M_B = \{UBU^{-1} \mid U \in U(n)\}$ (если домножить эрмитову матрицу на $\sqrt{-1}$, то получится косоэрмитова матрица, в этом смысле $\sqrt{-1}M_B$ есть просто общая орбита присоединенного действия группы $U(n)$ на своей касательной алгебре). Заметим, что на M_B действует тор диагональных унитарных матриц $T^n \subset U(n)$ посредством сопряжения.

1. Докажите, что неподвижными точками действия $T^n \circlearrowright M_B$ являются диагональные матрицы, полученные из B перестановкой диагональных значений.
2. Докажите, что M_B можно отождествить с многообразием полных флагов в $\mathbb{C}^n$.
3. Опишите веса касательных представлений тора в неподвижных точках и ГКМ-граф многообразия M_B.
4. Докажите, что на M_B можно канонически ввести сиплектическую форму[1], относительно которой действие тора гамильтоново, причем в качестве отображения моментов можно взять проекцию на диагональные матрицы:
$$\mu\colon (C = (c_{ij}) \in M_B) \mapsto (c_{11}, \dots, c_{nn}) \in \mathbb{R}^n.$$
5. Докажите теорему Хорна–Шура: диагональ эрмитовой (в частности, симметричной) матрицы C лежит в выпуклой оболочке точек, координаты которых — всевозможные перестановки собственных значений C.
6. Вычислите симплектический объем $\mathrm{Vol}_{\mathrm{symp}}(M_B)$. (Подсказка: полезно посмотреть на b_i как на формальные переменные и показать, что объем является многочленом степени $d = n(n-1)/2$, кососимметричным по всем переменным. Единственным таким многочленом является многочлен Вандермонда $\prod_{i<j}(b_i - b_j)$, с точностью до мультипликативной константы.)

Задача 2. Пусть $A = \mathrm{diag}(a_i)$, $B = \mathrm{diag}(b_i)$ — диагональные эрмитовы матрицы размера $n \times n$, $a_i \neq a_j$, $b_i \neq b_j$ при $i \neq j$. Рассмотрим интеграл Хариш-Чандры–Ицыксона–Зюбера (HCIZ):
$$\int_{U(n)} e^{-\mathrm{tr}(AUBU^{-1})} dU,$$

[1] в высокой литературе она называется формой Кириллова или формой Костанта и вводится на орбите коприсоединенного представления, однако в нашем случае группа компактна, поэтому присоединенное представление можно отождествить с коприсоединенным посредством $U(n)$-инвариантного скалярного произведения

где U пробегает по всем унитарным матрицам, а интеграл берется по инвариантной мере Хаара на $U(n)$, для которой $\operatorname{Vol} U(n) = 1$. Доказать, что интеграл HCIZ равен

$$\mathrm{const}\,\frac{\det(e^{-a_i b_j})}{\prod_{i<j}(a_i - a_j)\prod_{i<j}(b_i - b_j)}.$$

($\mathrm{const} = \prod_{i=1}^{n-1} i!$, но это не принципиально). Подсказки:

1. Идея: диагональные матрицы коммутируют с B, поэтому интеграл после перенормировки сводится к интегралу по многообразию полных флагов $U(n)/T^n$, которое кэлерово, а значит инвариантная мера на нем совпадает с симплектической мерой. По нему интеграл считается с помощью формулы локализации. Более подробно:

2. Рассмотрим многообразие $M_B = \{UBU^{-1} \mid U \in U(n)\}$ из первой задачи. Пусть $C = UBU^{-1} \in M_B$. Тогда $\operatorname{tr}(AUBU^{-1}) = \langle \mu(C), a\rangle$, где $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \cong \mathfrak{t}$.

3. Пусть $d = \dim M_B/2 = n(n-1)/2$. Имеем
$$\int_{U(n)} e^{-\operatorname{tr}(AUBU^{-1})} dU = \frac{\mathrm{const}}{\mathrm{Vol}_{\mathrm{symp}}(M_B)} \int_{M_B} \frac{\omega^d}{d!} e^{-\langle \mu, a\rangle}.$$

4. $\mathrm{Vol}_{\mathrm{symp}}(M_B)$ и $\int_{M_B} \omega^d e^{-\langle \mu, a\rangle}$ вычисляются по формуле эквивариантной локализации.

Задача 3. Пусть на квазиторическом многообразии $M_{(P,\Lambda)}$ задана каноническая стабильно комплексная структура. Пусть $\sigma_j(\underline{v})$ — элементарный симметрический многочлен от переменных $v_1, \dots, v_m$. Докажите, что

$$c_j(M_{(P,\lambda)}) = \sigma_j(\underline{v}) \in H^{2j}(M_{(P,\Lambda)}; R) \cong R[v_1, \dots, v_m]/(\text{соотношения}).$$

Подсказка: доказать последовательно:

1. $c_j^{T^m}(\mathbb{C}^m) = \sigma_j(\underline{v}) \in R[v_1, \dots, v_m] \cong H^*_{T^m}(\mathbb{C}^m)$;
2. $c_j^{T^m}(\mathcal{Z}_P) = \sigma_j(\underline{v}) \in R[K_P] \cong H^*_{T^m}(\mathcal{Z}_P)$;
3. $c_j^{T^n}(M_{(P,\lambda)}) = \sigma_j(\underline{v}) \in R[K_P] \cong H^*_{T^n}(M_{(P,\lambda)})$;
4. $c_j(M_{(P,\lambda)}) = \sigma_j(\underline{v}) \in R[K_P]/\Theta \cong H^*(M_{(P,\lambda)})$.

Задача 4. Квазиторическое многообразие называется линейной моделью, если все стабилизаторы действия тора являются координатными подторами. Докажите, что все классы Черна линейной модели нулевые.