

Торическая топология

Антон Айзенберг
ayzenberga@gmail.com

15 ноября 2016 г.

Содержание

1	Лекция 1. О чем и зачем?	1
2	Лекция 2. Спектральный ликбез	5
3	Лекция 3. Эквивариантная формальность	11
4	Лекция 4. Теорема локализации	17
5	Лекция 5. ГКМ-теория	24
6	Лекция 6. Квазиторические и момент-угол многообразия	30
7	Лекция 7. Симплектический ликбез	36
8	Лекция 8. Эквивариантная топология многообразий	43
9	Лекция 9. Формула интегрирования и аналитическая интерпретация	48
10	Лекция 10. Profit!!!	52

1 Лекция 1. О чем и зачем?

Далее X : топологическое пространство, как правило конечный CW-комплекс, а чаще даже компактное многообразие, возможно даже снабженное дополнительными структурами (например, гладкостью, симплектической структурой, алгебраической структурой и т.д.). На пространстве будет действовать компактный тор

$$T = T^n = S^1 \times \cdots \times S^1, \quad S^1 = \{t \in \mathbb{C} \mid |t| = 1\}.$$

Заметим, что компактный тор лежит в алгебраическом торе: $T^n \subset (\mathbb{C}^\times)^n$, где $\mathbb{C}^\times = \mathbb{C} \setminus \{0\}$, поэтому действие алгебраического тора всегда можно ограничить до действия компактного.

Иногда будет попадаться “вещественный тор” \mathbb{Z}_2^n , $\mathbb{Z}_2 = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ и его действия.

Если X : многообразие, и T действует на X свободно (т.е. $\forall x \in X : (tx = x) \Rightarrow (t = 1)$), то $Q = X/T$ тоже является многообразием. Имеется главное T^n -расслоение $X \rightarrow Q$. Нам же будут интереснее ситуации, когда действие сильно не свободное. В таких ситуациях на $Q = X/T$ часто возникает интересная комбинаторика.

Пример 1.1. Самый простой и самый типовой пример: $X = \mathbb{C}^n$, $T^n \curvearrowright \mathbb{C}^n$, $(t_1, \dots, t_n) \cdot (z_1, \dots, z_n) = (t_1 z_1, \dots, t_n z_n)$. Пространство орбит такого действия — неотрицательный конус:

$$\mathbb{R}_{\geq 0}^n, \quad \mathbb{R}_{\geq 0} = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}.$$

На конусе имеется комбинаторика: у него есть вершина, ребра, грани и т.д. Видно, что грани размерности k соответствуют k -мерным орбитам действия (т.е. $n - k$ -мерным стационарным подгруппам).

Пример 1.2. Вращение двумерной сферы вокруг своей оси: $T^1 \curvearrowright S^2$. Имеется две неподвижные точки. Пространство орбит — отрезок. Неподвижные точки соответствуют концам отрезка (рис.1)

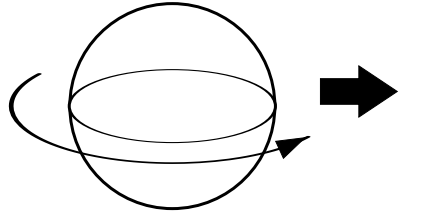


Рис. 1: Стандартное действие окружности на двумерной сфере и отображение проекции на пространство орбит

Пример 1.3. На $\mathbb{C}P^2 = \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} / \mathbb{C}^\times$ естественным образом действует T^3 :

$$(t_0, t_1, t_2)[z_0 : z_1 : z_2] = [t_0 z_0 : t_1 z_1 : t_2 z_2].$$

Пространство орбит этого действия: $\mathbb{R}_{\geq 0}^3 / \mathbb{R}_{>}$, что можно отождествить с треугольником. Заметим, что действие неэффективно: диагональ $\Delta(T^1) = (t, t, t) \subset T^3$ является ядром неэффективности. Поэтому в действительности имеется эффективное действие тора $T^2 \cong T^3 / \Delta(T^1)$ на $\mathbb{C}P^2$, пространство орбит которого — треугольник.

Более общо, имеется эффективное действие $T^n \curvearrowright \mathbb{C}P^n$, $(t_1, \dots, t_n)[z_0 : z_1 : \dots : z_n] = [z_0 : t_1 z_1 : \dots : t_n z_n]$, такое что $\mathbb{C}P^n / T^n = \Delta^n$, n -мерный симплекс. Неподвижные точки действия соответствуют вершинам симплекса, множества орбит размерности 1 — ребрам симплекса и т.д.

Многогранники часто возникают как пространства орбит торических действий: $X_P \rightarrow P = X_P / T$, $\dim X_P = 2n$, $\dim P = \dim T = n$.

Разные интересные факты вокруг торической топологии

(1) Игрушечный пример. Рассмотрим набор из m векторов в $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$, идущих по часовой стрелке, таких что $\det(v_i, v_{i+1}) = 1$ (где предполагается, что $v_{m+1} = v_1, v_{m+2} = v_2$ и т.д.). Допустим, что ломаная с вершинами в концах этих векторов обмоталась вокруг начала координат r раз.

Предложение 1.4.

$$\frac{1}{3} \sum_{i=1}^m \det(v_i, v_{i+2}) = m - 4r$$

Доказательство. Идея: по данной совокупности векторов можно построить гладкое компактное 4-мерное многообразие с действием тора T^2 . Проверяется, что $-\sum_{i=1}^m \det(v_i, v_{i+2})$ это первое число Понтрягина этого многообразия, а $-(m - 4r)$ это его сигнатура. Требуемое тождество тогда является следствием из теоремы Хирцебруха. \square

(2) Первым торическим топологом был Архимед. Теорему Архимеда о сферическом поясе можно сформулировать так: пусть $\mu: \mathbb{S}^2 \rightarrow [-1, 1]$ функция высоты на круглой сфере радиуса 1. Тогда для любого борелевского множества $A \subset [-1, 1]$ выполнено

$$\text{Vol}_{\mathbb{S}^2}(\mu^{-1}(A)) = \text{Vol}_{\text{eucl}}(A) \cdot \text{Vol}(T^1).$$

Более общо: вместо сферы можно взять т.н. симплектическое торическое многообразие M_P , вместо μ — т.н. отображение моментов, образом которого является многогранник P (это отображение можно отождествить с проекцией на пространство орбит). Тогда

$$\text{Vol}_{M_P}(\mu^{-1}(A)) = \text{Vol}_{\text{eucl}}(A) \cdot \text{Vol}(T^n) = \text{Vol}_{\text{eucl}}(A) \cdot (2\pi)^n$$

для любого борелевского $A \subset P$. Слева стоит симплектический объем “торического пояса” на M_P , а справа — евклидов объем подмножества многогранника. Такое обобщение теоремы Архимеда изучается теорией Дёйстермата–Хекмана (см. формулировку в Лекции 7).

В частности, теория применима к отображению $\mathbb{C}P^n$ на симплекс Δ^n из примера выше (на $\mathbb{C}P^n$ есть стандартная мера — форма Фубини–Штуди — ее можно ввести с помощью симплектической редукции, см. пример 7.23).

(3) Комбинаторика симплицальных разбиений сферы. Пусть K : симплицально-клеточный комплекс (= полусимплицальный комплекс), гомеоморфный S^{n-1} (т.е. CW-комплекс, все клетки которого симплексы, а все отображения приклейки инъективны). Пусть $f_j = \{I \in K \mid |I| = j\}$: число симплексов размерности j (формально положим $f_{-1} = 1$). Какие есть соотношения на числа $(f_0, f_1, \dots, f_{n-1})$?

Определение 1.5. Определим числа h_0, h_1, \dots, h_n по формуле

$$\sum_{j=0}^n h_j t^{n-j} = \sum_{j=0}^n f_{j-1} (t-1)^{n-j}, \quad (1.1)$$

где t : формальная переменная. Набор чисел (h_0, h_1, \dots, h_n) называется h -вектором симплицеального комплекса K .

Теорема 1.6. $\forall j = 0, \dots, n : h_j = h_{n-j}$ и $h_j \geq 0$.

Доказательство. Идея: по триангуляции K (и некоторым дополнительным комбинаторным данным Λ) всегда можно построить замкнутое гомологическое над \mathbb{Q} многообразие $M_{(K,\Lambda)}$ размерности $2n$ несущее действие тора T^n . Для этого многообразия выполнено $\beta_{2j}(M_{(K,\Lambda)}) = h_j$ и $\beta_{2j+1}(M_{(K,\Lambda)}) = 0$. Теорема следует из двойственности Пуанкаре. \square

Теорема 1.7 (g-теорема). Если K : граница выпуклого симплицеального многогранника, то $1 = h_0 \leq h_1 \leq \dots \leq h_{[n/2]}$.

Доказательство. Идея: в выпуклом случае в качестве $M_{(K,\Lambda)}$ можно взять проективное алгебраическое многообразие (орбифолд), а для чисел Бетти таких многообразий верна теорема Лефшеца: $\beta_0(M_{(K,\Lambda)}) \leq \beta_2(M_{(K,\Lambda)}) \leq \dots \leq \beta_{2[n/2]}(M_{(K,\Lambda)})$ \square

Теорема 1.8. Набор чисел (h_0, \dots, h_n) является h -вектором полусимплицеального разбиения сферы \Leftrightarrow

$$\begin{cases} h_j \geq 0, h_0 = 1, \\ h_j = h_{n-j}, \\ \text{Если } n \text{ четно и } \exists j \in]0, n[: h_j = 0, \text{ то } h_{n/2} \text{ четно.} \end{cases}$$

Доказательство. Идея: исследование классов Штифеля–Уитни многообразия $M_{(K,\Lambda)}$, в случае, если оно гладкое. \square

(4) Пересечения вещественных квадратик. Рассмотрим пространство \mathbb{R}^m с координатами z_1, \dots, z_m . Рассмотрим семейство квадратик

$$\begin{cases} b_{1,1}z_1^2 + \dots + b_{1,m}z_m^2 = d_1, \\ \dots \\ b_{k,1}z_1^2 + \dots + b_{k,m}z_m^2 = d_k \end{cases}$$

Предположим, что полученное пересечение (обозначим его \mathcal{Z}) невырожденно и компактно. Какова топология пересечения?

Пример 1.9. Рассмотрим в \mathbb{R}^5 квадррики

$$\begin{cases} z_1^2 + z_3^2 = 2, \\ z_2^2 + z_4^2 = 2, \\ z_1^2 + z_2^2 + z_5^2 = 3. \end{cases}$$

В этом случае пересечением будет сфера с пятью ручками $(T^2)^{\#5}$.

Пример 1.10. Рассмотрим в \mathbb{R}^{10} пересечение

$$\begin{cases} z_1^2 + z_{1'}^2 + z_3^2 + z_{3'}^2 = 2, \\ z_2^2 + z_{2'}^2 + z_4^2 + z_{4'}^2 = 2, \\ z_1^2 + z_{1'}^2 + z_2^2 + z_{2'}^2 + z_5^2 + z_{5'}^2 = 3. \end{cases}$$

(как в предыдущем примере, только продублировали каждую координату). Весьма нетривиально доказывается, что в пересечении получится $(S^3 \times S^4)^{\#5}$.

Как подойти к подобным задачам? Заметим, что на \mathbb{R}^m есть действие группы \mathbb{Z}_2^m , $(\pm z_1, \dots, \pm z_m)$, причем это действие сохраняет каждую из квадратик. Отображение на пространство орбит можно отождествить с отображением $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^m$, $(z_1, \dots, z_m) \mapsto (z_1^2, \dots, z_m^2)$. Несложно проверить, что образом пересечения квадратик \mathcal{Z} будет выпуклый многогранник. Топологию \mathcal{Z} описывают в терминах комбинаторики этого многогранника, причем здесь есть множество открытых вопросов.

Пересечения квадратик, даже такого простого вида, оказываются чрезвычайно сложным объектом (например, они могут не быть формальными пространствами, а в их гомологиях может быть сколь угодно сложное кручение).

(5) Действия произвольных групп Ли. Изучение действия $G \curvearrowright X$ часто сводится в том или ином виде к индуцированному действию их максимального тора $T \subset G$ и информации о действии группы Вейля W .

Так, например $H^*(BG; \mathbb{R}) \cong H^*(BT; \mathbb{R})^W$ и, более общо, $H_G^*(X) \cong H_T^*(X)^W$.

2 Лекция 2. Спектральный ликбез

Спектральные последовательности являются мощным инструментом гомологической алгебры. В некотором смысле они обобщают точные последовательности.

Для пары пространств $Y \subseteq X$ имеется точная последовательность в гомологиях

$$\dots \rightarrow H_j(Y) \rightarrow H_j(X) \rightarrow H_j(X, Y) \rightarrow H_{j-1}(Y) \rightarrow \dots \quad (2.1)$$

Неформально говоря, этот объект позволяет по информации о гомологиях Y и относительных гомологиях X по Y получить какую-то информацию о гомологиях X . На самом деле, иногда позволяет, а иногда и нет. В этом смысле особенно хороши те случаи, когда в точной последовательности много нулей: если какой-то член зажат между двумя нулями, то он тоже ноль, а если два члена зажаты между двумя нулями, то они изоморфны.

Напомним, откуда берется точная последовательность в гомологиях. Каждому пространству X можно сопоставить дифференциальный комплекс сингулярных цепей $C_*(X) = \bigoplus_i C_i(X)$, $\partial: C_i(X) \rightarrow C_{i-1}(X)$, $\partial^2 = 0$. Каждой паре $Y \subseteq X$ сопоставляется короткая точная последовательность дифференциальных комплексов

$$0 \rightarrow C_*(Y) \rightarrow C_*(X) \rightarrow C_*(X, Y) \rightarrow 0, \quad (2.2)$$

где по определению $C_*(X, Y) = C_*(X)/C_*(Y)$. По определению $H_*(X) = H_*(C_*(X), \partial)$.

Лемма о змее утверждает, что короткая точная последовательность дифференциальных комплексов $0 \rightarrow (A, \partial) \rightarrow (B, \partial) \rightarrow (C, \partial) \rightarrow 0$ порождает длинную точную последовательность их гомологий

$$\cdots \rightarrow H_{j+1}(C) \xrightarrow{\delta} H_j(A) \rightarrow H_j(B) \rightarrow H_j(C) \xrightarrow{\delta} H_{j-1}(A) \rightarrow \cdots$$

где δ : вспомогательные гомоморфизмы, называемые связывающими гомоморфизмами.

Применение леммы о змее к короткой последовательности (2.2) дает точную последовательность гомологий пары (2.1).

Заметим также, что для тройки вложенных дифференциальных комплексов $A_1 \subseteq A_2 \subseteq A_3$ имеется короткая точная последовательность дифференциальных комплексов

$$0 \rightarrow A_2/A_1 \rightarrow A_3/A_1 \rightarrow A_3/A_2 \rightarrow 0$$

которая по лемме о змее индуцирует длинную точную последовательность гомологий:

$$\cdots \rightarrow H_{j+1}(A_3, A_2) \xrightarrow{\delta} H_j(A_2, A_1) \rightarrow H_j(A_3, A_1) \rightarrow H_j(A_3, A_2) \xrightarrow{\delta} H_{j-1}(A_2, A_1) \rightarrow \cdots \quad (2.3)$$

Здесь и далее используется обозначение $H_*(A, B) = H_*(A/B)$.

Фильтрации Рассмотрим теперь более общую ситуацию, когда есть не одно подпространство Y в X а целая цепочка вложенных “матрешек”:

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots \subseteq X_n = X.$$

Такие цепочки называются фильтрациями. Общий вопрос, на который мы хотим научиться отвечать, таков: как связаны между собой

$$H_*(X_0), H_*(X_1, X_0), \dots, H_*(X_n, X_{n-1}) \text{ и } H_*(X)?$$

Переходя от пространств к дифференциальным комплексам сингулярных цепей мы получим чисто алгебраическую задачу. Пусть

$$(A_0, \partial) \subseteq (A_1, \partial) \subseteq (A_2, \partial) \subseteq \cdots \subseteq (A_n, \partial) = (A, \partial)$$

— фильтрация дифференциального комплекса (A, ∂) (см. определение ниже). Как связаны гомологии последовательных факторов $H_*(A_i, A_{i-1})$ и гомологии самого комплекса $H_*(A)$?

Выпишем все гомологии факторов в таблицу $E_{*,*}^1$ следующим образом (в каждом столбце происходит небольшой сдвиг): На позиции с координатами (p, q) стоит группа $E_{p,q}^1 = H_{p+q}(A_p, A_{p-1})$. Эта группа по определению есть фактор

$$E_{p,q}^1 = \frac{\{(p+q)\text{-цепи } a \text{ из } A_p \mid \partial a \in A_{p-1}\}}{A_{p-1} + \partial A_p} \quad (2.4)$$

Рис. 2: Первый член спектральной последовательности

(здесь и далее предполагается, что в знаменателе стоит не вся указанная группа, а лишь ее пересечение с числителем). Заметим, что ∂ от числителя $E_{p,q}^1$ попадает в числитель $E_{p-1,q}^1$ а ∂ от знаменателя $E_{p,q}^1$ — в знаменатель $E_{p-1,q}^1$ (проверьте это!). Поэтому ∂ индуцирует корректный гомоморфизм $d_1: E_{p,q}^1 \rightarrow E_{p-1,q}^1$. Легко проверить, что построенный d_1 совпадает со связывающим гомоморфизмом

$$\delta: H_{p+q}(A_p, A_{p-1}) \rightarrow H_{p+q-1}(A_{p-1}, A_{p-2})$$

для тройки $A_{p-2} \subset A_{p-1} \subset A_p$ (см длинную точную последовательность (2.3)).

Поскольку $\partial^2 = 0$ и d_1 индуцирован из ∂ , имеем $d_1^2 = 0$. Таким образом, имеющаяся у нас начальная информация о гомологиях последовательных факторов представляет из себя таблицу из групп $E_{p,q}^1$ и дифференциалов d_1 бистепени $(-1, 0)$.

Перейдем к гомологиям: рассмотрим таблицу, состоящую из групп $E_{p,q}^2 = H_*(E_{p,q}^1, d_1)$. Используя описание (2.4) и явный вид дифференциала d_1 , легко получить описание для $E_{p,q}^2$:

$$E_{p,q}^2 = \frac{\{(p+q)\text{-цепи } a \text{ из } A_p \mid \partial a \in A_{p-2}\}}{A_{p-1} + \partial A_{p+1}} \quad (2.5)$$

Заметим, что ∂ от числителя $E_{p,q}^2$ попадает в числитель $E_{p-2,q+1}^2$ а ∂ от знаменателя $E_{p,q}^2$ — в знаменатель $E_{p-2,q+1}^2$ (проверьте это!). Поэтому ∂ индуцирует корректный гомоморфизм, на этот раз “бьющий конем” $d_2: E_{p,q}^2 \rightarrow E_{p-2,q+1}^2$. Этот гомоморфизм индуцирован из ∂ , поэтому он также удовлетворяет $d_2^2 = 0$. В итоге мы получаем таблицу из групп $E_{p,q}^2$ и дифференциалов $d_2: E_{p,q}^2 \rightarrow E_{p-2,q+1}^2$.

Перейдем к гомологиям опять: рассмотрим $E_{p,q}^3 = H_*(E_{p,q}^2, d_2)$. Опять же имеем явное описание:

$$E_{p,q}^3 = \frac{\{(p+q)\text{-цепи } a \text{ из } A_p \mid \partial a \in A_{p-3}\}}{A_{p-1} + \partial A_{p+2}} \quad (2.6)$$

и видим, что ∂ индуцирует корректно определенный дифференциал $d_3: E_{p,q}^3 \rightarrow E_{p-3,q+2}^3$.

Мы можем продолжать этот процесс перехода к гомологиям и построения новых и новых дифференциалов до бесконечности. Говоря не совсем формально, мы “в пределе” приходим к группе

$$E_{p,q}^\infty = \frac{\{(p+q)\text{-цепи } a \text{ из } A_p \mid \partial a \in A_{p-\infty}\}}{A_{p-1} + \partial A_{p+\infty}} \quad (2.7)$$

Заметим однако, что наша фильтрация была ограничена, поэтому при всех $p < 0$ можно положить $A_p = 0$, а при всех $p \geq n$ $A_p = A$. Поэтому

$$E_{p,q}^\infty = \frac{\{(p+q)\text{-цепи } a \text{ из } A_p \mid \partial a = 0\}}{A_{p-1} + \partial A} \quad (2.8)$$

Видно, что эта группа совпадает с

$$\frac{\text{Образ } H_{p+q}(A_p) \text{ в } H_{p+q}(A)}{\text{Образ } H_{p+q}(A_{p-1}) \text{ в } H_{p+q}(A)}$$

Таким образом, мы получили последовательность биградуированных групп и дифференциалов $(E_{p,q}^1, d_1), (E_{p,q}^2, d_2), \dots$, каждая из которых является гомологиями предыдущей, такую что $E_{p,q}^1$ содержит информацию о гомологиях факторов A_p/A_{p-1} , а в пределе получаются факторы гомологий (что есть уже некая информация о гомологиях A). В этом и состоит суть спектральных последовательностей.

Формализм Пусть R : основное кольцо (например, \mathbb{Z} или поле). Напомним, что дифференциальный комплекс — это \mathbb{Z} -градуированный R -модуль $C_* = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} C_i$, снабженный гомоморфизмом $\partial: C_i \rightarrow C_{i-1}$, $\partial^2 = 0$, который называется дифференциалом. Гомологии комплекса — это модули

$$H_i(C) = H_i(C_*, \partial) = H_*(C_i, \partial) = \frac{\text{Ker}(\partial: C_i \rightarrow C_{i-1})}{\text{Im}(\partial: C_{i+1} \rightarrow C_i)}$$

Определение 2.1. *Фильтрация дифференциального комплекса (C_*, ∂) (соотв. векторных пространств, соотв. топологических пространств) — это последовательность вложенных дифференциальных подкомплексов (соотв. векторных пространств, соотв. топологических пространств)*

$$F_0 C \subseteq F_1 C \subseteq \dots \subseteq F_p C \subseteq \dots \subseteq C$$

такая что $C = \lim_{\rightarrow p} F_p C$. Условие, что $F_p C$ есть дифференциальный подкомплекс в C означает, что $\partial(F_p C) \subseteq F_p C$.

Фильтрация на (C_*, ∂) индуцирует фильтрацию на гомологиях:

$$F_p H_i(C) = \text{Im}(H_i(F_p C) \rightarrow H_i(C)) \subset H_i(C)$$

Определение 2.2. Ассоциированным градуированным модулем (также называется присоединенным модулем) для фильтрации F_*C называется модуль

$$\mathrm{Gr} C = \bigoplus_{p \in \mathbb{Z}} \mathrm{Gr}_p C, \quad \mathrm{Gr}_p C = F_p C / F_{p-1} C$$

Определение 2.3. Гомологическая спектральная последовательность — это следующая совокупность данных

- Модули $E_{p,q}^r$, заданные при $p, q \in \mathbb{Z}$, $r \geq 0$ (либо $r \geq r_0$). При фиксированном r группы $E_{p,q}^r$ называются r -м членом (или листом, или страницей) спектральной последовательности
- Гомоморфизмы $d_r: E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r$, удовлетворяющие $d_r^2 = 0$. Эти гомоморфизмы называются дифференциалами спектральной последовательности.

Эти данные удовлетворяют условию

$$E_{p,q}^{r+1} = H_*(E_{p,q}^r, d_r) = \frac{\mathrm{Ker} d_r: E_{p,q}^r \rightarrow E_{p-r,q+r-1}^r}{\mathrm{Im} d_r: E_{p+r,q-r+1}^r \rightarrow E_{p,q}^r}.$$

Говорят, что спектральная последовательность сходится, если $\forall p, q$ и $\forall r > r_0 = r_0(p, q)$ выполнено $d_r|_{E_{p,q}^r, E_{p+r,q-r+1}^r} = 0$. В этом случае, начиная с члена r_0 переход к гомологиям на позиции (p, q) ничего не меняет и мы имеем

$$E_{p,q}^{r_0} \cong E_{p,q}^{r_0+1} \cong E_{p,q}^{r_0+2} \cong \dots \stackrel{\text{def}}{=} E_{p,q}^\infty$$

Говорят, что спектральная последовательность вырождается в члене E^{r_0} , если $d_r = 0$ при $r \geq r_0$. В этом случае, $E_{p,q}^\infty = E_{p,q}^{r_0}$.

Теорема 2.4. Пусть (F_*C_*, ∂) : фильтрованный дифференциальный комплекс. Тогда существует спектральная последовательность $(E_{p,q}^r, d_r)$, $r \geq 0$ такая что

$$E_{p,q}^1 = H_{p+q}(\mathrm{Gr}_p C_*).$$

Если фильтрация F_*C_i ограничена для любого i , то спектральная последовательность сходится к

$$E_{p,q}^\infty = \mathrm{Gr}_p H_{p+q}(C_*)$$

Замечание 2.5. Утверждение теоремы вкратце записывается так

$$E_{p,q}^1 = H_{p+q}(\mathrm{Gr}_p C_*) \Rightarrow H_{p+q}(C_*).$$

В подобной записи мы как бы забываем, что предельный член последовательности — это на самом деле не модуль $H_{p+q}(C_*)$, а его присоединенный модуль относительно некоторой фильтрации. Однако такая краткая запись хорошо передает суть решаемой задачи: стартовать с гомологий последовательных фактор-комплексов и прийти к гомологиям большого комплекса.

Доказательство. Фактически, мы это уже доказали. Положим

$$E_{p,q}^r = \frac{\{(p+q) - \text{цепи } a \text{ из } A_p \mid \partial a \in A_{p-r}\}}{A_{p-1} + \partial A_{p-1+r}}.$$

Тогда все дифференциалы d_r корректно индуцированы дифференциалом ∂ , и каждый следующий лист равен гомологиям предыдущего (упр: проверить требуемые свойства). \square

Замечание 2.6. Если речь идет о модулях над полем, т.е. о векторных пространствах, то переход от фильтрации к присоединенному модулю не теряет информации. Если F_*H : фильтрация векторного пространства, то $\text{Gr } H \cong H$.

Над \mathbb{Z} это уже не так. Например, для фильтрации $\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}$ имеем $\text{Gr } \mathbb{Z} = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2 \neq \mathbb{Z}$.

Следствие 2.7. *Для фильтрации топологического пространства*

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X_n \subseteq \dots \subseteq X$$

имеется гомологическая спектральная последовательность такая что

$$E_{p,q}^1 \cong H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \Rightarrow H_{p+q}(X).$$

В случае коэффициентов в поле имеем $H_j(X) \cong \bigoplus_{p+q=j} E_{p,q}^\infty$.

Пример 2.8. Для двучленной фильтрации $Y \subset X$ спектральная последовательность превращается в длинную точную последовательность пары (упр.: проверить)

Спектральная последовательность Майера–Вьеториса Пока мы построили спектральное обобщение точной последовательности гомологий пары. Имеется также спектральное обобщение точной последовательности Майера–Вьеториса.

Пусть пространство X покрыто множествами $U_i, i = 1, \dots, m: X = \bigcup_{i=1}^m U_i$. Нервом покрытия называется следующий симплициальный комплекс на множестве вершин $[m] = \{1, \dots, m\}$:

$$K = \{I \subseteq [m] \mid \bigcap_{i \in I} U_i \neq \emptyset\}$$

(симплексы натянуты на те вершины, для которых соответствующие элементы покрытия пересекаются). Тогда имеется спектральная последовательность Майера–Вьеториса:

$$E_{p,q}^1 = \bigoplus_{\{i_1, \dots, i_{p+1}\} \in K} H_q(U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_{p+1}}) \Rightarrow H_{p+q}(X)$$

Эта спектральная последовательность позволяет (в некотором смысле, конечно) из гомологий всевозможных пересечений U_i собрать гомологии их объединения. Это такой гомологический аналог формулы включения-исключения.

Дифференциалы d_1 , действующие на первой странице, явно описываются:

$$d_1 = \bigoplus \pm i_* : \bigoplus H_q(U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_{p+1}}) \rightarrow H_q(U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_p}),$$

где i_* : гомоморфизмы гомологий, индуцированные включениями подмножеств, а знак \pm определяется так же, как и при определении симплициальных гомологий для комплекса K .

Замечание 2.9. С.п. Майера–Вьеториса можно вывести из с.п. фильтрации, только фильтровать нужно не само пространство X , а гомотопический копредел его покрытия. Мы этого делать не будем.

Пример 2.10. Приведем одно приложение с.п. Майера–Вьеториса. Вначале, в качестве мотивации одно важное утверждение из гомотопической теории

Предложение 2.11 (Нерв-лемма). Допустим, в покрытии X всевозможные непустые пересечения элементов покрытия стягиваемы¹. Тогда пространство X гомотопически эквивалентно нерву покрытия K .

Имеется естественный гомологический аналог этого утверждения.

Предложение 2.12 (Гомологическая нерв-лемма). Допустим, в покрытии X всевозможные непустые пересечения элементов покрытия гомологичны точке. Тогда пространство X имеет те же гомологии, что и нерв покрытия K .

Доказательство. Пусть все гомологии имеют коэффициенты R . В первом члене с.п. Майера–Вьеториса имеем $E_{p,q}^1 = \bigoplus_{\{i_1, \dots, i_{p+1}\} \in K} H_q(U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_{p+1}}) = 0$, если $q \neq 0$. Таким образом, все старшие дифференциалы d_2, d_3, \dots равны нулю по размерностным соображениям (они либо быют из нуля, либо быют в нуль, либо и то и другое). Поэтому с.п. вырождается в члене E^2 .

Заметим теперь, что $E_{p,0}^1 = \bigoplus_{\{i_1, \dots, i_{p+1}\} \in K} H_0(U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_{p+1}}) = \bigoplus_{\{i_1, \dots, i_{p+1}\} \in K} R$, что совпадает с модулем p -х симплициальных цепей симплициального комплекса K :

$$E_{p,0}^1 \cong C_p(K)$$

Дифференциал d_1 совпадает с симплициальным дифференциалом ∂ . Значит $E_{p,0}^2 \cong H_p(K)$. Имеем:

$$E_{p,0}^2 \cong H_p(K), \quad E_{p,q}^2 = 0 \text{ при } q \neq 0.$$

Значит $H_p(X) = E_{p,0}^\infty = E_{p,0}^2 \cong H_p(K)$. □

3 Лекция 3. Эквивариантная формальность

Спектральная последовательность Серра Пусть $X \xrightarrow{p} B$ локально тривиальное расслоение со слоем F и односвязной базой. Пусть $B : CW$ -комплекс с клеточной фильтрацией

$$B_0 \subseteq B_1 \subseteq \dots \subseteq B, \quad B = \lim_{\rightarrow i} B_i$$

¹Требуются также какие-то технические условия на покрытие. Если же X клеточный комплекс, а все U_i : клеточные подкомплексы, то лемма точно работает

Рассмотрим прообраз этой фильтрации в X :

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X, \quad X_i = p^{-1}(B_i) \quad (3.1)$$

Далее будем пренебрегать кручением в гомологиях (либо считаем, что коэффициенты в поле, либо, что кручения нет). Спектральная последовательность в гомологиях, ассоциированная с фильтрацией (3.1), имеет вид

$$E_{p,q}^1 \cong H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) \Rightarrow H_{p+q}(X)$$

Имеем

$$\begin{aligned} H_{p+q}(X_p, X_{p-1}) &\cong \tilde{H}_{p+q}(X_p/X_{p-1}) \cong \bigoplus_{\sigma \in B, \dim \sigma = p} H_{p+q}(\sigma \times F, \partial \sigma \times F) \cong \\ &\cong \bigoplus_{\sigma \in B, \dim \sigma = p} H_q(F) \cong \mathcal{C}_p^{CW}(B, H_q(F)). \end{aligned}$$

То есть первая страница — это клеточные цепи базы с коэффициентами в гомологиях слоев. Можно проверить, что дифференциал $d_1 = \delta: H_{p+q+1}(X_{p+1}, X_p) \rightarrow H_{p+q}(X_p, X_{p-1})$ совпадает с клеточным дифференциалом $\mathcal{C}_p^{CW}(B, H_q(F)) \xrightarrow{d} \mathcal{C}_{p-1}^{CW}(B, H_q(F))$. Поэтому,

$$E_{p,q}^2 \cong H_p(B, H_q(F)).$$

Поскольку B односвязно, группы гомологий слоя, висящие над различными клетками, можно отождествить. По теореме об универсальных коэффициентах, их можно вынести за скобки:

$$E_{p,q}^2 \cong H_p(B, H_q(F)) \cong H_p(B) \otimes H_q(F).$$

Таким образом, спектральная последовательность Серра для расслоения X с базой B и слоем F имеет вид

$$E_{p,q}^2 \cong H_p(B) \otimes H_q(F) \Rightarrow H_{p+q}(X).$$

Следствие 3.1. Для расслоения X с базой B и слоем F выполнено $\beta_j(X) \leq \beta_j(B \times F)$.

Когомологические спектральные последовательности — то же, что и гомологические, только дифференциалы бьют в обратную сторону. Когомологическая спектральная последовательность — это набор R -модулей $E_r^{p,q}$, $p, q \in \mathbb{Z}$, $r \geq 0$, и гомоморфизмов $d^r: E_r^{p,q} \rightarrow E_r^{p+r, q-r+1}$, таких что $E_{r+1}^{p,q} = H^*(E_r^{p,q}, d^r)$.

Предложение 3.2. Любая убывающая фильтрация градуированных дифференциальных комплексов

$$(C^*, \delta: C^* \rightarrow C^{*+1}) \supseteq \dots \supseteq F^p C^* \supseteq F^{p+1} C^* \supseteq \dots$$

определяет когомологическую спектральную последовательность $E_1^{p,q} = H^{p+q}(\text{Gr}^p C^*) \Rightarrow H^{p+q}(C^*)$, если фильтрация ограничена для каждого C^i .

Определение 3.3. Когомологическая спектральная последовательность называется мультипликативной, если на каждом листе задано умножение

$$\star_r : E_r^{p,q} \otimes E_r^{p',q'} \rightarrow E_r^{p+p',q+q'},$$

относительно которого дифференциал d^r удовлетворяет правилу Лейбница:

$$d^r(\alpha \star_r \beta) = (d^r \alpha) \star_r \beta + (-1)^{p+q} \alpha \star_r (d^r \beta)$$

и \star_{r+1} индуцировано из \star_r . Говорят, что мульт.спек.посл. сходится к фильтрованной алгебре H^* , если алгебра (E_∞, \star_∞) совпадает с алгеброй $\text{Gr } H^*$.

Допустим, на дифференциальном комплексе C^* с убывающей фильтрацией задано умножение $\cdot : C^i \otimes C^j \rightarrow C^{i+j}$, уважающее дифференциал:

$$\delta(\alpha \cdot \beta) = \delta(\alpha) \cdot \beta + (-1)^{\deg \alpha} \alpha \cdot \delta(\beta),$$

и фильтрацию

$$F^p C^* \otimes F^{p'} C^* \rightarrow F^{p+p'} C^*.$$

Тогда умножение \cdot корректно опускается до умножения $\star = \star_0$ на $\text{Gr}^* C^* = E_0^{*,*}$:

$$\star_0 : \frac{F^p C^*}{F^{p+1} C^*} \otimes \frac{F^{p'} C^*}{F^{p'+1} C^*} \rightarrow \frac{F^{p+p'} C^*}{F^{p+p'+1} C^*}$$

Эта операция индуцирует все последующие операции \star_r в спектральной последовательности для фильтрованного комплекса, причем $\star_\infty : \text{Gr}^p H^i \otimes \text{Gr}^{p'} H^j \rightarrow \text{Gr}^{p+p'} H^{i+j}$ индуцируется из умножения $\star : F^p H^i \otimes F^{p'} H^j \rightarrow F^{p+p'} H^{i+j}$. Значит,

Предложение 3.4. Если на фильтрованном дифференциальном комплексе $F^* C^*$ задано умножение, согласованное с дифференциалом и фильтрацией, то спектральная последовательность из предложения 3.2 мультипликативна и сходится к алгебре гомологий $H(C^*)$.

Когомологии пространств Пусть, как и ранее $X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X$ возрастающая фильтрация топологического пространства. Применение контравариантного функтора сингулярных коцепей $C^*(\cdot) = \text{Hom}_R(C_*(\cdot), R)$ дает

$$C^*(X_0) \leftarrow C^*(X_1) \leftarrow \dots \leftarrow C^*(X)$$

Чтобы получить из этого агрегата убывающую фильтрацию дифференциальных комплексов на $C^*(X)$, надо рассмотреть ядра этих эпиморфизмов². Положим $F^p C^*(X) = \text{Ann}(F_{p-1} C_*(X)) \subseteq C^*(X)$. Применение предложения 3.2 к этой фильтрации дает

²В случае функтора $C_*(\cdot)$, фильтрация получалась сразу. В когомологическом случае нужен дополнительный шаг. Это несколько усложняет восприятие

Предложение 3.5. *Имеется когомологическая спектральная последовательность $E_1^{p,q} = H^{p+q}(X_p, X_{p-1}) \Rightarrow H^{p+q}(X)$.*

Заметим, что вообще говоря, эта последовательность не мультипликативна: ниоткуда не следует, что \cup -произведение коцепей уважает фильтрацию. Однако, когомологический аналог спектральной последовательности Серра можно сделать мультипликативным (это содержательное утверждение, но мы его не доказываем)

Теорема 3.6. *Пусть $X \xrightarrow{F} B$ локально тривиальное расслоение (или, более общо, расслоение Серра) с односвязной базой. Тогда имеется мультипликативная когомологическая спектральная последовательность Серра*

$$E_2^{p,q} = H^p(B) \otimes H^q(F) \Rightarrow H^{p+q}(X).$$

Конструкция Бореля и эквивариантные когомологии Пусть топологическая группа G действует на X слева. Нам хочется определить некий алгебраический инвариант действия — эквивариантные когомологии $H_G^*(X)$. Хотим от него следующих свойств:

1. Если $G \cup X$ свободно, то $H_G^*(X) = H^*(X/G)$;
2. $H_G^*(\cdot)$ должны быть эквивариантным гомотопическим инвариантом (т.е. на категории G -пространств и G -эквивариантных отображений, $H_G^*(\cdot)$ должен задавать гомотопический функтор).

Этих свойств достаточно, чтобы дать естественное конструктивное определение эквивариантных когомологий.

Определение 3.7. *Пусть EG : универсальное G -пространство, т.е. EG стягиваемо и G действует на EG свободно справа. Пространство*

$$X_G = EG \times_G X = (EG \times X)/G$$

называется конструкцией Бореля для пространства X . Здесь на $EG \times X$ задано правое действие $(e, x)g = (eg, g^{-1}x)$. Таким образом,

$$EG \times_G X = \{(e, x)\}/(eg, x) \sim (e, gx).$$

Определение 3.8. *Эквивариантными когомологиями пространства называются когомологии его конструкции Бореля:*

$$H_G^*(X; R) = H^*(X_G)$$

Идея понятна: мы заменяем пространство X на гомотопное ему пространство, на котором уже действие свободно, после чего используем свойства 1-2.

Предложение 3.9. $H_G^*(\cdot)$ задает контравариантный гомотопический функтор на категории левых G -пространств.

Имеем следующую диаграмму

$$\begin{array}{ccc} EG \times X & \xrightarrow[\quad X]{\text{pr}_1} & EG, & p[(e, x)] = [e] \\ \downarrow G & & \downarrow G & \\ X_G \equiv EG \times_G X & \xrightarrow[\quad p]{\quad X} & BG \end{array}$$

В нижней строчке получаем расслоение Серра: с базой BG , слоем X и тотальным пространством — конструкцией Бореля X_G . Индуцированный гомоморфизм колец когомологий $p^*: H^*(BG) \rightarrow H^*(X_G) = H_G^*(X)$ делает эквивариантные когомологии модулем над кольцом $H^*(BG)$. Более того, нетрудно проверить, что гомоморфизмы колец эквивариантных когомологий, индуцированные G -эквивариантными отображениями, являются гомоморфизмами $H^*(BG)$ -модулей. В этом смысле теория эквивариантных когомологий оказывается несколько богаче, чем теория обычных когомологий.

Пример 3.10. Основной для нас пример $G = T^n$. Группа коммутативна, поэтому ее правые и левые действия можно не различать. Имеем $ES^1 = S^\infty = \lim_{\rightarrow n} S^{2n+1}$, $BS^1 = \mathbb{C}P^\infty = \lim_{\rightarrow n} \mathbb{C}P^n$. Значит, $BT^n = (\mathbb{C}P^\infty)^n$. Это пространство односвязно, и известны его когомологии:

$$H^*(BT^n) \cong R[v_1, \dots, v_n], \deg v_i = 2.$$

Таким образом, тор-эквивариантные когомологии являются модулями над кольцом многочленов.

Для расслоения $p: X_T \xrightarrow{X} BT$ имеем мультипликативную спектральную последовательность Серра:

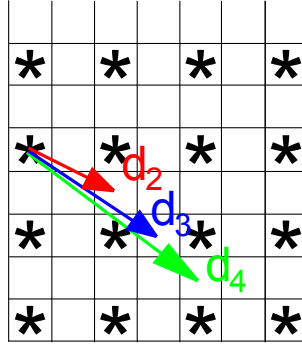
$$E_2^{p,q} \cong H^p(BT^n) \otimes H^q(X) \Rightarrow H_T^{p+q}(X). \quad (3.2)$$

Заметим, что $H^p(BT^n) = 0$ при нечетных p . Значит, на второй странице спектралки что-то стоит только в столбцах с четными номерами.

Определение 3.11. Если спектральная последовательность (3.2) вырождается в члене E_2 , то X называется (когомологически) эквивариантно формальным пространством.

Предложение 3.12. Если $H^{2j+1}(X) = 0$, то X эквивариантно формально относительно любого действия тора.

Доказательство. Имеем $E_2^{p,q} = 0$, если хотя бы одно из чисел p, q нечетное. Значит все дифференциалы d_2, d_3, \dots зануляются по размерностным соображениям (см. рис.).



□

Замечание 3.13. Если действие $T \curvearrowright X$ свободно и X конечный клеточный комплекс, то X не является эквивариантно формальным. Действительно, если бы это было так, то, с одной стороны, $H_T^*(X) = H^*(X/T)$: конечномерное векторное пространство, а с другой стороны, $H_T^*(X) \cong H^*(BT) \otimes H^*(X)$: бесконечномерное пространство.

Будем обозначать алгебру многочленов от n переменных степеней 2 через $R[n]$:

$$H^*(BT^n; R) \cong R[v_1, \dots, v_n] = R[n].$$

Пусть $R[n]_+ = (v_1, \dots, v_n)$: максимальный градуированный идеал этой алгебры. Гомоморфизм $R[n] \rightarrow R[n]/R[n]_+ \cong R$ делает R модулем над $R[n]$.

Заметим, что любой модуль (или алгебру) M над $R[n]$ можно превратить в модуль (или алгебру) над R применив функтор $\otimes_{R[n]} R$, т.е. убив все, что порождено многочленами положительных степеней:

$$M \otimes_{R[n]} R = M/R[n]_+ M.$$

Такая процедура называется заменой коэффициентов.

Предложение 3.14. *Для эквивариантно формальных пространств процедура замены коэффициентов превращает алгебру эквивариантных когомологий в алгебру обычных когомологий.*

Доказательство. Имеем $H_T^*(X)/R[n]_+ H_T^*(X) = \text{Gr}^0 H_T^*(X) = E_\infty^{0,*} = E_2^{0,*} = H^*(X)$. □

Заметим, что $H_T^*(X)/R[n]_+ H_T^*(X) = H_T^*(X)/(p^*(v_1), \dots, p^*(v_m))$, где $p: X_T \rightarrow BT$ — отображение Серра, а v_1, \dots, v_n — образующие кольца $H^*(BT)$. Смысл предложения таков: для эквивариантно формальных пространств обычные когомологии извлекаются из эквивариантных с помощью факторизации по некоторому идеалу.

4 Лекция 4. Теорема локализации

Пример 4.1. Вспомним пример из первой лекции. Пусть, $T^2 \curvearrowright \mathbb{C}P^2$: стандартное действие, а $\mathbb{C}P^2 \rightarrow \Delta^2 = \mathbb{R}_{\geq 0}^3 \cap \{x_0 + x_1 + x_2 = 1\}$: отображение на пространство орбит. Его можно явно задать формулой:

$$[z_0 : z_1 : z_2] \mapsto \left(\frac{|z_0|^2}{|z|^2}, \frac{|z_1|^2}{|z|^2}, \frac{|z_2|^2}{|z|^2} \right), \quad |z|^2 = |z_0|^2 + |z_1|^2 + |z_2|^2.$$

Поскольку у $\mathbb{C}P^2$ коhomологии только в четных размерностях, $\mathbb{C}P^2$ эквивариантно формально. Значит, $H_T^*(\mathbb{C}P^2)$ изоморфен $H^*(\mathbb{C}P^2) \otimes H^*(BT^2) \cong R[2]^{\oplus 3}$ как модуль над $H^*(BT^2) = R[2]$. Т.е. $H_T^*(\mathbb{C}P^2)$ является трехмерным модулем. Неподвижных точек у действия тора на $\mathbb{C}P^2$ тоже три. Эта взаимосвязь неспроста. Неподвижные точки играют важную роль в изучении эквивариантных коhomологий.

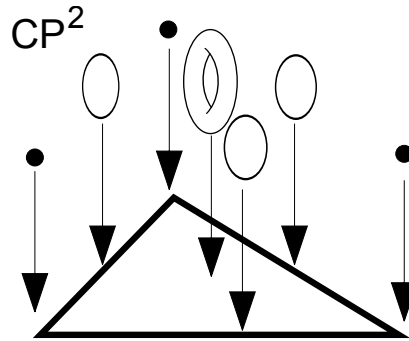


Рис. 3: Структура проекции $\mathbb{C}P^2$ на пространство орбит

Обозначения

- T_x : стабилизатор точки $x \in X$: $T_x = \{t \in T \mid tx = x\}$;
- Tx : орбита точки $x \in X$, рассматриваемая как подмножество X :

$$Tx = \{tx \mid t \in T\}$$

;

- $[x]$: орбита точки $x \in X$, рассматриваемая как точка пространства орбит:

$$[x] \in X/T$$

;

- $X_T = ET \times_T X$: конструкция Бореля;

- F : множество неподвижных точек действия,

$$F = \{x \in X \mid Tx = x\}.$$

Иногда также обозначается X^T , но чтобы не путалось с конструкцией Бореля, мы так делать не будем.

Имеем классический эквивариантный гомеоморфизм $Tx \cong T/T_x$. Пусть $i: F \hookrightarrow X$ обозначает вложение множества неподвижных точек.

Далее будем считать $R = \mathbb{R}$ (\mathbb{Q} и \mathbb{C} тоже годятся). Напомним, что $H^*(BT^n) = \mathbb{R}[n] = \mathbb{R}[v_1, \dots, v_n]$, $\deg v_i = 2$.

Локализации Напомним некоторые базовые сведения из алгебры. Пусть S — мультипликативное подмножество в $\mathbb{R}[n]$ (т.е. $1 \in S$ и $s_1, s_2 \in S \Rightarrow s_1 s_2 \in S$). Локализацией $S^{-1}\mathbb{R}[n]$ называется кольцо формальных дробей с числителями из $\mathbb{R}[n]$ и знаменателями из S :

$$S^{-1}\mathbb{R}[n] = \left\{ \frac{p}{s} \mid p \in \mathbb{R}[n], s \in S \right\} / \sim, \quad \frac{p_1}{s_1} \sim \frac{p_2}{s_2} \Leftrightarrow \exists s \in S : p_1 s_2 s = p_2 s_1 s.$$

Если M : модуль над $\mathbb{R}[n]$, то его локализация определяется аналогично

$$S^{-1}M = \left\{ \frac{m}{s} \mid m \in M, s \in S \right\} / \sim, \quad \frac{m_1}{s_1} \sim \frac{m_2}{s_2} \Leftrightarrow \exists s \in S : m_1 s_2 s = m_2 s_1 s.$$

$S^{-1}M$ является модулем как над $\mathbb{R}[n]$, так и над $S^{-1}\mathbb{R}[n]$. Если M : алгебра над $\mathbb{R}[n]$, то $S^{-1}M$: алгебра над $S^{-1}\mathbb{R}[n]$. Локализация является функтором, т.е. гомоморфизм модулей (соотв. алгебр) $f: M \rightarrow N$ индуцирует гомоморфизм локализованных модулей (соотв. алгебр) $S^{-1}f: S^{-1}M \rightarrow S^{-1}N$. Этот функтор точен, т.е. переводит точные последовательности в точные (упр.).

Пример 4.2. Самый естественный пример мультипликативного подмножества $S = \mathbb{R}[n] \setminus \{0\}$. В этом случае $S^{-1}\mathbb{R}[n]$: поле рациональных функций от n переменных, а $S^{-1}M$: векторное пространство над этим полем. В частности, для произвольного $\mathbb{R}[n]$ -модуля M можно определить его ранг как

$$\text{rk } M \stackrel{\text{def}}{=} \dim_{S^{-1}\mathbb{R}[n]} S^{-1}M.$$

Нам однако будет неудобно работать с таким мультипликативным подмножеством, т.к. локализация по нему теряет градуировку.

Определение 4.3. *Мультипликативное подмножество $S \subset \mathbb{R}[n]$ называется однородным, если каждый его элемент однородный.*

В дальнейшем будем рассматривать только однородные S .

Пример 4.4. Однородный аналог предыдущего примера. Рассмотрим максимально возможное однородное мультипликативное подмножество — множество всех ненулевых однородных многочленов:

$$S_{\max} = (\mathbb{R} \cup \mathbb{R}[n]_2 \cup \mathbb{R}[n]_4 \cup \dots) \setminus \{0\}.$$

Такое нам годится.

Определение 4.5. Элемент $m \in M$ называется S -кручением, если $sm = 0$ для некоторого $s \in S$.

В этом случае получаем $m = \frac{m}{1} = 0$ в $S^{-1}M$. Полезный вывод:

Локализация убивает кручение.

Сформулируем основную теорему этой лекции

Теорема 4.6 (Теорема о локализации). Пусть $T = T^n$ действует на X , и $i: F \rightarrow X$: вложение подпространства неподвижных точек действия. Тогда

$$S^{-1}H_T^*(X) \xrightarrow{S^{-1}i^*} S^{-1}H_T^*(F)$$

есть изоморфизм $S^{-1}\mathbb{R}[n]$ -алгебр для некоторой однородной мультипликативной системы $S \subset H^*(BT^n)$. Это заведомо верно для $S = S_{\max}$.

Нам потребуется одно нехитрое утверждение. Пусть $G \subset T$: подгруппа тора. Тогда T/G очевидно является T -пространством, причем, $H_T^*(T/G) = H^*(ET \times_T T/G) = H^*(ET/G) = H^*(BG)$. Как и для любого T -пространства, отображение T/G в точку индуцирует гомоморфизм $p^*: H_T^*(\text{pt}) = H^*(BT) \rightarrow H_T^*(T/G) = H^*(BG)$, т.е. превращает $H^*(BG)$ в модуль над $H^*(BT) = \mathbb{R}[n]$.

Лемма 4.7. Если $G \subsetneq T$: собственная подгруппа тора, то $H_T^*(T/G)$ является $\mathbb{R}[n]$ -кручением. Более того, существует единственный элемент³ $q_G \in \mathbb{R}[n]$, такой что $q_G \cdot H_T^*(T/G) = 0$.

Доказательство. Пусть $\dim G = k$. Поскольку G собственная подгруппа, имеем $k < n$. Имеем линейное отображение $p^*: H^2(BT) \rightarrow H^2(BG)$. Поскольку $\dim_{\mathbb{R}} H^2(BT) = n > k = \dim_{\mathbb{R}} H^2(BG)$, у этого отображения есть ядро: $0 \neq q_G \in H^2(BT)$, $p^*(q_G) = 0$. Значит $q_G \cdot H^*(BG) = 0$. \square

³в определении кручения эти элементы могли быть разными для разных элементов $m \in M$

Спектральная последовательность Лере Для доказательства теоремы о локализации нам потребуется более сложный агрегат : спектральная последовательность Лере. Ее можно понимать как обобщение спектральной последовательности Серра на случай, когда слои отображения могут быть различными.

Пусть $\pi: X \rightarrow Y$ сюръективное отображение топологических пространств. Тогда имеется спектральная последовательность Лере⁴:

$$E_2^{p,q} \cong H^p(Y, \mathcal{H}^q) \Rightarrow H^{p+q}(X),$$

где \mathcal{H}^q : пучок на Y (локальная система коэффициентов), росток которого в точке y (значение на клетке, содержащей y) равен

$$\mathcal{H}_y^q = H^q(\pi^{-1}(y)).$$

Неформально говоря, спектральная последовательность Лере позволяет из когомологий слоев отображения собрать когомологии всего пространства.

Пример 4.8. Рассмотрим отображение $\pi: S^2 \rightarrow D^1$ (рис.1). На отрезке D^1 есть клеточная структура с одной одномерной клеткой a и двумя нульмерными u, v . Над нульмерными клетками висят полюса сферы: $\pi^{-1}(u) = \pi^{-1}(v) = \text{pt}$. Над точками из внутренней a висит окружность. Значит первый член спектралки Лере имеет вид

$$\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \uparrow \\ q \\ E_1^{p,q} \end{array} & \begin{array}{c} H_1(S^1) \\ H_0(S^1) \end{array} \\ \hline & \begin{array}{c} H_0(\text{pt}) \oplus H_0(\text{pt}) \end{array} \end{array} = \begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \uparrow \\ q \\ E_1^{p,q} \end{array} & \begin{array}{c} \mathbb{Z} \\ \mathbb{Z} \end{array} \\ \hline & \begin{array}{c} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \end{array} \end{array}$$

Во втором члене получаем

$$\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} \uparrow \\ q \\ E_2^{p,q} \end{array} & \begin{array}{c} \mathbb{Z} \\ 0 \end{array} \\ \hline & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \end{array}$$

$H^*(S^2) : \quad \mathbb{Z} \quad 0 \quad \mathbb{Z}$

Видно, что дальше спектралка вырождается, а по диагоналям получились когомологии сферы.

⁴Более общо и более формально, для сюръективного отображения $\pi: X \rightarrow Y$ и любого пучка \mathcal{F} на X имеется спектральная последовательность $E_2^{p,q} \cong H^p(Y; R^q \pi_* \mathcal{F}) \Rightarrow H^{p+q}(X; \mathcal{F})$, где $R^q \pi_* \mathcal{F}$ есть пучкование предпучка $(U \subseteq Y) \mapsto H^q(\pi^{-1}(U); \mathcal{F})$

Спектралки Лере, связанные с действием тора (1) Рассмотрим проекцию $\pi: X \rightarrow X/T$ на пространство орбит. Пусть $x \in X$, $[x] = \pi(x) \in X/T$: соответствующая орбита. Тогда $\pi^{-1}([x]) = Tx \cong T/T_x$. Применяя спектральную последовательность Лере к такому отображению, получим

$$E_2^{p,q} = H^p(X/T; \mathcal{H}^q) \Rightarrow H^{p+q}(X), \quad \mathcal{H}_{[x]}^q = H^q(Tx) = H^q(T/T_x).$$

Т.е. спектральная последовательность стартует с пучка внешних алгебр (когомологий орбит действия), и сходится к когомологиям X .

Пример 4.9. Применение спектралки Лере к отображению $\pi: \mathbb{C}P^2 \rightarrow \Delta^2$ дает пучок, ростки которого изображены на рис. 4 ($\Lambda[n]$ обозначает внешнюю алгебру от n переменных степени 1).

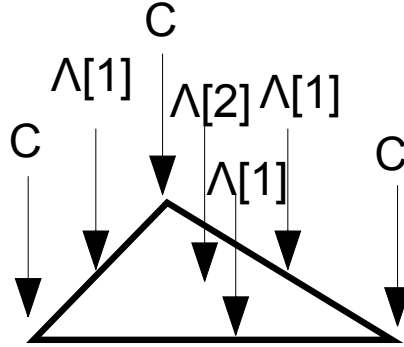


Рис. 4: Пучок когомологий прообразов для $\mathbb{C}P^2$

(2) Теперь сделаем то же самое, но с эквивариантными когомологиями. Рассмотрим отображение

$$\pi: X_T = ET \times_T X \rightarrow X/T, \quad [(e, x)] \mapsto [x]$$

Прообразом точки $[x] \in X/T$ является

$$\pi^{-1}([x]) = ET \times_T (Tx) = ET \times_T (T/T_x) = ET/T_x = BT_x.$$

В этом случае спектралка Лере имеет вид

$$E_2^{p,q} = H^p(X/T; \mathcal{H}_T^q) \Rightarrow H_T^{p+q}(X), \quad (\mathcal{H}_T^q)_{[x]} = H_T^*(Tx) \cong H^*(BT_x).$$

Т.е. спектральная последовательность стартует с пучка алгебр многочленов (эквивариантных когомологий орбит действия), и сходится к эквивариантным когомологиям X . В этой спектралке и пучок и то, к чему все сходится, имеют структуру модулей над $\mathbb{R}[n]$, то есть это — спектральная последовательность модулей над $\mathbb{R}[n]$.

Пример 4.10. Для $\mathbb{C}P^2$ получаем пучок алгебр многочленов, изображенный на рис. 5.

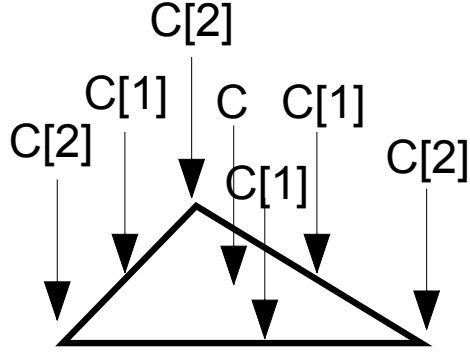


Рис. 5: Пучок эквивариантных когомологий прообразов для CP^2

Заметим, что пучок эквивариантных когомологий принимает в качестве значения алгебру многочленов от n переменных лишь в неподвижных точках. Над всеми прочими точками висят алгебры от менее чем n переменных, а значит все эти значения являются $\mathbb{R}[n]$ -кручением. Это ключ к пониманию теоремы о локализации. Докажем ее.

Доказательство. Поскольку эквивариантные когомологии строились как обычные когомологии от конструкции Бореля, они обладают теми же естественными свойствами. В частности, имеется точная последовательность эквивариантных когомологий пары $F \subset X$:

$$\dots \rightarrow H_T^*(X, F) \rightarrow H_T^*(X) \xrightarrow{i^*} H_T^*(F) \rightarrow H_T^{*+1}(X, F) \rightarrow \dots$$

Поскольку S^{-1} точный функтор, имеем точную последовательность:

$$\dots \rightarrow S^{-1}H_T^*(X, F) \rightarrow S^{-1}H_T^*(X) \xrightarrow{S^{-1}i^*} S^{-1}H_T^*(F) \rightarrow S^{-1}H_T^{*+1}(X, F) \rightarrow \dots$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что $S^{-1}H_T^*(X, F) = 0$.

Имеется относительная версия спектральной последовательности Лере:

$$E_2^{p,q} = H^p(X/T, F/T; \mathcal{H}_T^q) \Rightarrow H_T^{p+q}(X, F), \quad (\mathcal{H}_T^q)_{[x]} = H_T^*(Tx).$$

Поскольку S^{-1} точен, естественно предположить, что спектралку модулей можно почленно локализовать. Поэтому имеется спектралка

$$H^p(X/T, F/T; S^{-1}\mathcal{H}_T^q) \Rightarrow S^{-1}H_T^{p+q}(X, F), \quad (S^{-1}\mathcal{H}_T^q)_{[x]} = S^{-1}H_T^*(Tx). \quad (4.1)$$

Осталось заметить, что если $x \in X \setminus F$, то T_x является собственной подгруппой тора, а значит $H_T^*(Tx) = H_T^*(T/T_x)$ является кручением по Лемме (4.7). Значит, для правильно подобранного мультипликативного множества S , все локализации $S^{-1}H_T^*(Tx)$ при $x \in X \setminus F$ зануляются. Следовательно, пучок $S^{-1}\mathcal{H}_T^q$ равен нулю на $(X \setminus F)/T$, и вся спектральная последовательность (4.1) равна нулю. Значит $S^{-1}H_T^*(X, F) = 0$, что и требовалось. \square

Следствия

Следствие 4.11. $\text{rk } H_T^*(X) = \text{rk } H_T^*(F)$.

Следствие 4.12. $\text{rk } H_T^*(X) = \dim_{\mathbb{R}} H^*(F) = \sum_i \beta_i(F)$.

Доказательство. Действие T на F тривиально, поэтому $H_T^*(F) = H^*(ET \times_T F) = H^*(BT \times F)$. Значит $S^{-1}H_T^*(F) \cong S^{-1}H^*(BT) \otimes H^*(F)$. Значит $\text{rk } H_T^*(F) = \dim H^*(F)$. \square

Следствие 4.13. Если неподвижные точки изолированы, то $\text{rk } H_T^*(X) = |F|$.

Следствие 4.14. Если X эквивариантно формально, то $\dim H^*(X) = \dim H^*(F)$.

Пример 4.15. На CP^2 не существует действия окружности с числом изолированных неподвижных точек отличным от 3.

Следствие 4.16. Пусть в $H_T^*(X)$ нет кручения (в частности это верно для эквивариантно формального X). Тогда $i^*: H_T^*(X) \rightarrow H_T^*(F)$ — инъективный гомоморфизм $\mathbb{R}[n]$ -модулей.

Доказательство. Допустим противное: $i^*(a) = 0$, $a \neq 0$. Поскольку a не кручение, элемент $\frac{a}{1} \in S^{-1}H_T^*(X)$ не равен нулю. С другой стороны, $S^{-1}i^*(\frac{a}{1}) = 0$: противоречие с теоремой о локализации. \square

У следствия 4.16 имеются важные усиления.

Теоремы Чанга–Скьелбрета и Атьи–Бредона Рассмотрим на X фильтрацию $X^0 \subseteq X^1 \subseteq \dots \subseteq X^n = X$, где

$$X^i = \bigcup_{\dim Tx \leq i} Tx \quad (4.2)$$

— объединение всех орбит тора размерности не больше i . В частности $X^0 = F$, множество неподвижных точек.

Теорема 4.17 (Чанг–Скьелбрет). Если X эквивариантно формально, то имеется точная последовательность

$$0 \rightarrow H_T^*(X) \xrightarrow{i^*} H_T^*(X^0) \xrightarrow{\delta} H_T^{*+1}(X^1, X^0),$$

где δ : связывающий гомоморфизм точной последовательности эквивариантных когомологий пары (X^1, X^0)

Иными словами, образ $H_T^*(X)$ в $H_T^*(F)$ совпадает с образом эквивариантного одномерного остова. Можно сказать даже больше:

Теорема 4.18 (Атья–Бредон). *Если X эквивариантно формально, то имеется точная последовательность*

$$0 \rightarrow H_T^*(X) \xrightarrow{i^*} H_T^*(X^0) \xrightarrow{\delta} H_T^{*+1}(X^1, X^0) \xrightarrow{\delta_1} H_T^{*+2}(X^2, X^1) \xrightarrow{\delta_1} \dots \xrightarrow{\delta_{n-1}} H_T^{*+n}(X^n, X^{n-1})$$

где δ_i : связывающий гомоморфизм точной последовательности эквивариантных когомологий тройки (X^{i+1}, X^i, X^{i-1}) .

Говоря более абстрактно, в эквивариантно формальном случае спектральная последовательность эквивариантных когомологий, ассоциированная с фильтрацией (4.2) вырождается в члене E_2 , причем $E_2^{p,q} = 0$ при $p \neq 0$ (проверьте, что такое утверждение эквивалентно формулировке выше!).

5 Лекция 5. ГКМ-теория

Пусть $F = X^0$: множество неподвижных точек, X^1 : объединение одномерных орбит действия, а $i : F \rightarrow X^1$ и $i_{01} : F \rightarrow X_1$ естественные вложения. Теорема Чанга–Скьелбрета утверждает, что в эквивариантно формальном случае $H_T^*(X) \cong \text{Im } i^* = \text{Im } i_{01}^*$ в алгебре $H_T^*(F) \cong \mathbb{R}[n] \otimes H^*(F)$. Т.е. для описания эквивариантных когомологий X достаточно знать его эквивариантный 1-остов. Этот подход реализован в ГКМ-теории.

Пример 5.1. Пусть T^1 действует на S^2 стандартным образом (пример 1.2). Найдем $H_{T^1}^*(S^2)$. Воспользуемся точной последовательностью Майера–Вьеториса для эквивариантных когомологий. Пусть a_+ и a_- : северный и южный полюсы, а D_+ и D_- : северная и южная полусферы. Имеем

$$\begin{array}{ccccccc} \dots & \longrightarrow & H_{T^1}^*(S^2) & \longrightarrow & H_{T^1}^*(D_+) \oplus H_{T^1}^*(D_-) & \longrightarrow & H_{T^1}^*(S^1) \longrightarrow H_{T^1}^{*+1}(S^2) \longrightarrow \dots \\ & & \searrow & & \parallel & & \\ & & & & H_{T^1}^*(a_+) \oplus H_{T^1}^*(a_-) & & \\ & & \searrow & & \parallel & & \\ & & & & H_{T^1}^*(F) \cong \mathbb{R}[1]^{\oplus 2} & & \end{array}$$

Согласно следствию 4.16, i^* инъективен, поэтому точная последовательность Майера–Вьеториса расщепляется на короткие точные последовательности

$$0 \rightarrow H_{T^1}^*(S^2) \rightarrow H_{T^1}^*(D_+) \oplus H_{T^1}^*(D_-) \rightarrow H_{T^1}^*(S^1) \rightarrow 0$$

причем в этих последовательностях все отображения являются гомоморфизмами алгебр. Осталось заметить, что действие окружности T^1 на экваторе $S^1 = D_+ \cap D_-$ свободно, поэтому $H_{T^1}^*(S^1) = H^*(\text{pt}) = \mathbb{R}$. В итоге получаем:

$$H_{T^1}^*(S^2) = \text{Im } i^* = \{(Q_+, Q_-) \in \mathbb{R}[1]^{\oplus 2} \mid Q_+(0) = Q_-(0)\}$$

Пример 5.2. Усложним задачу. Пусть теперь тор T^n действует на S^2 с $(n-1)$ -мерным ядром неэффективности G . Иными словами, пусть $\alpha \in \text{Hom}(T^n, S^1)$: некоторый ненулевой вес, $G = \ker \alpha$, и T^n действует на S^2 следующим образом

$$ts \stackrel{\text{def}}{=} \alpha(t)s.$$

Как и в предыдущем примере, точная последовательность Майера–Вьеториса расщепляется в короткую точную последовательность алгебр

$$0 \rightarrow H_{T^n}^*(S^2) \rightarrow H_{T^n}^*(D_+) \oplus H_{T^n}^*(D_-) \rightarrow H_{T^n}^*(S^1) \rightarrow 0,$$

или, эквивалентно,

$$0 \rightarrow H_{T^n}^*(S^2) \rightarrow \mathbb{R}[n]^{\oplus 2} \rightarrow H^*(BG) \rightarrow 0. \quad (5.1)$$

Замечание 5.3. Приведем следующий полезный факт. Пусть G : компактный тор, \mathfrak{g} : его касательная алгебра Ли, $\mathfrak{g}^* = \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{g}, \mathbb{R})$: двойственная к ней. Имеют место естественные изоморфизмы

$$H^2(BG; \mathbb{R}) \cong \mathfrak{g}^*.$$

Естественность нетрудно проверить в координатах (упр.).

Заметим, что вес $\alpha \in \text{Hom}(T^n, S^1)$ задает короткую точную последовательность коммутативных групп

$$0 \rightarrow G \rightarrow T \xrightarrow{\alpha} S^1 \rightarrow 0,$$

которая в свою очередь индуцирует короткую точную последовательность касательных алгебр

$$0 \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{t} \xrightarrow{d\alpha} \mathbb{R} \rightarrow 0,$$

и кокасательных алгебр

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{d\alpha^*} \mathfrak{t}^* \rightarrow \mathfrak{g}^* \rightarrow 0.$$

Эквивалентно,

$$0 \rightarrow \mathbb{R} \xrightarrow{d\alpha^*} H^2(BT) \rightarrow H^2(BG) \rightarrow 0.$$

Пусть $a \in H^2(BT)$: ненулевой элемент из образа $d\alpha^*$. Мы будем просто говорить, что a соответствует весу α . Имеем

$$H^*(BG) \cong H^*(BT)/(a),$$

где (a) : идеал, порожденный элементом a .

Из точной последовательности (5.1) и рассуждений выше получаем

Лемма 5.4. Пусть действие T^n на S^2 задано при помощи веса $\alpha \in \text{Hom}(T^n, S^1)$. Тогда

$$H_{T^n}^*(S^2) = \text{Im } i^* = \{(Q_+, Q_-) \in \mathbb{R}[n]^{\oplus 2} \mid Q_+ \equiv Q_- \pmod{(a)}\},$$

где $a \in H^2(BT^n)$: элемент, соответствующий весу α .

ГКМ-теория (Горески–Коттвиц–Макферсон) Пусть X : гладкое (замкнутое ориентируемое) $2m$ -мерное многообразие, и задано гладкое действие $T^n \curvearrowright X$. Пусть $p \in F$: изолированная неподвижная точка действия. Тогда дифференциал действия задает представление T^n в касательном пространстве $T_p X \cong \mathbb{R}^{2m}$. Это представление раскладывается в сумму неприводимых двумерных:

$$T_p X \cong V(\alpha_1) \oplus \cdots \oplus V(\alpha_m),$$

где $\alpha_i \in \text{Hom}(T^n, S^1)$: веса,

$$V(\alpha_i) \cong \mathbb{C}, \quad t \cdot z = \alpha_i(t)z \quad (5.2)$$

(если ориентации неприводимых слагаемых не фиксированы, то веса α_i определены лишь с точностью до знака⁵)

Определение 5.5. Пусть X : $2m$ -мерное односвязное компактное ориентируемое многообразие с эффективным T^n -действием, $m \geq n$. X называется ГКМ-многообразием, если

1. X эквивариантно формально;
2. Множество неподвижных точек F конечно;
3. Для любой неподвижной точки $p \in F$ веса неприводимых представлений в касательном пространстве $\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\} \subset \text{Hom}(T^n, S^1)$ попарно линейно независимы.
4. Любое инвариантное подмногообразие, состоящее из не более чем одномерных орбит тора, имеет неподвижную точку.

Смысл этих условий таков:

1. \Rightarrow применима теорема Чанга–Скьелбрета;
2. $\Rightarrow H_T^*(F) \cong \bigoplus_{p \in F} \mathbb{R}[n] \cong \{f : F \rightarrow H^*(BT)\}$;
3. $\Rightarrow \dim X^1 = 2$ и X^1 есть объединение инвариантных 2-сфер, а X^1/T есть граф.

Пункт (3) не совсем очевиден из определения. По теореме о слайсе (эквивариантный аналог теоремы о трубчатой окрестности), любое неприводимое 2-мерное подпредставление $V(\alpha_i)$ в $T_p X$ является касательным пространством к инвариантному 2-мерному подмногообразию с тем же стабилизатором $\text{Кег } \alpha_i$. Это подмногообразие обязано быть компактным, ориентируемым, и на нем действует окружность с хотя бы

⁵Часто предполагается, что на многообразии есть комплексная структура, и действие тора ее сохраняет. В этом случае все неприводимые представления являются одномерными комплексными, а значит имеют каноническую ориентацию. Поэтому неоднозначности знака уже нет. Иногда накладывают другие требования, чтобы избавиться от неоднозначности.

одной неподвижной точкой. Значит, ничем иным, кроме как двумерной сферой оно быть не может (например это следует из эйлеровой характеристики). У действия на сфере, однако, есть еще одна неподвижная точка. Следовательно, эта сфера натянута между двумя неподвижными точками $p, q \in F$ исходного действия. Будем обозначать эту сферу S_{pq} . Заметим, что веса касательных представлений к S_{pq} в точках p и q совпадают (т.к. и то и другое — это вес действия T^n на S_{pq}). Будем обозначать этот вес α_{pq} . В частности получаем, что для любой неподвижной точки $p \in F$ и любого веса ее касательного представления найдется другая неподвижная точка, в касательном представлении которой появляется тот же вес.

Возникает комбинаторная структура: ГКМ-граф $\Gamma = (V, E)$. Вершины — это неподвижные точки действия, ребра — пары неподвижных точек, соединенные инвариантной 2-сферой, и кроме того каждому ребру приписан вес $\alpha_{pq} \in \text{Hom}(T^n, S^1) \cong \mathbb{Z}^n$. Поскольку касательное пространство в каждой неподвижной точке разбивается в сумму ровно m неприводимых представлений, каждая неподвижная точка содержится ровно в m инвариантных сферах. Следовательно, граф Γ m -валентный.

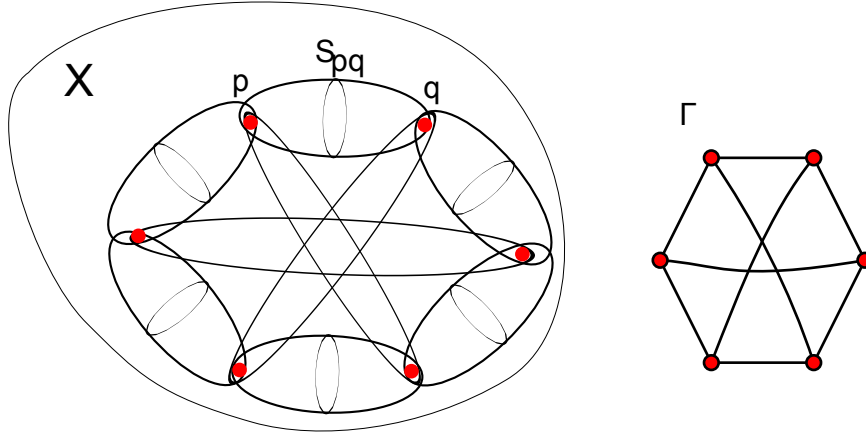


Рис. 6: Эквивариантный 1-остов в ГКМ-многообразии и соответствующий ГКМ-граф

Условие (4) гарантирует, что ГКМ-граф совпадает с пространством X^1/T . Действительно, любое инвариантное подмногообразие, состоящее из не более чем одномерных орбит, по условию втыкается в какую-то неподвижную точку, а значит совпадает с одной из инвариантных сфер⁶.

Теорема 5.6 (ГКМ-теорема). Пусть X : ГКМ-многообразие, а $\Gamma = (V, E)$: его ГКМ-граф с весами $\alpha_{pq} \in \text{Hom}(T^n, S^1)$, $\{p, q\} \in E$. Тогда

$$H_T^*(X) \cong \{f : V \rightarrow \mathbb{R}[n] = H^*(BT^n) \mid \forall \{p, q\} \in E : f(p) \equiv f(q) \pmod{(\alpha_{pq})}\}, \quad (5.3)$$

⁶Есть два подхода к определению ГКМ-теории. В алгебраическом (а именно так оно у ГКМ см. [12]) рассматривают действие алгебраического тора $(\mathbb{C}^\times)^n$, и условие (4) из определения как-то само пропадает. Топологический подход позволяет включить больше примеров, но во всех известных мне описаниях топологической ГКМ-теории это условие забывают. Возможно, оно как-то выводится из эквивариантной формальности, но явно эту выкладку я тоже нигде не видел.

где $a_{pq} \in H^2(BT^n)$: элемент, соответствующий весу α_{pq} . Изоморфизм понимается в смысле $\mathbb{R}[n]$ -алгебр.

Доказательство. Использовать теорему Чанга–Скьелбрета и лемму 5.4. \square

Замечание 5.7. Поскольку ГKM-многообразие X эквивариантно формально, получаем описание обычных когомологий

$$H^*(X) = H_T^*(X)/\mathbb{R}[n]_+ H_T^*(X)$$

Замечание 5.8. На первый взгляд кажется, что ГKM-теория дает конкретный ответ в большом числе случаев. Это ощущение отчасти ошибочно, поскольку описание эквивариантных когомологий как подкольца в большем кольце на практике крайне неудобно. Для описания структуры кольца или модуля удобнее всего использовать запись через образующие и соотношения. Однако ни образующие, ни соотношения из формулы (5.3) в общем виде не извлекаются. В каждом конкретном случае, для этого требуется дополнительная работа.

Типичные примеры

Пример 5.9. Многообразие CP^n со стандартным действием тора T^n является ГKM-многообразием. Неподвижные точки имеют вид

$$[0 : \dots : 0 : * : 0 : \dots : 0],$$

а инвариантные сферы имеют вид

$$S_{pq} = \{[0 : \dots : 0 : \overset{p}{*} : \dots : \overset{q}{*} : \dots : 0]\}, \quad 0 \leq p < q \leq n$$

ГKM-граф — это остов симплекса, т.е. полный граф на $n + 1$ вершине. Веса, приписанные ребрам графа — это корни системы A_{n+1} . Для соответствующих классов в $H^2(BT^n) \cong \mathbb{R}[v_1, \dots, v_n]$, имеем, $a_{0p} = v_p$, $p = 1, \dots, n$, $a_{pq} = v_p - v_q$, $1 \leq p < q \leq n$. Имеем

$$H_T^*(CP^n) = \left\{ (Q_0, \dots, Q_n) \in \mathbb{R}[n]^{\oplus n+1} \mid \begin{array}{l} Q_0 \equiv Q_p \pmod{v_p, \forall 1 \leq p \leq n,} \\ Q_p \equiv Q_q \pmod{v_p - v_q, \forall 1 \leq p < q \leq n} \end{array} \right\}$$

Пример 5.10. Рассмотрим грассманиан $G_{4,2} = \{\Pi \subset \mathbb{C}^4 \mid \dim_{\mathbb{C}} \Pi = 2\}$. Имеем $\dim_{\mathbb{R}} G_{4,2} = 8$. Стандартное действие тора T^4 на \mathbb{C}^4 индуцирует действие тора на $G_{4,2}$. Диагональная подгруппа тора является ядром неэффективности. В итоге имеем эффективное действие $T^3 \curvearrowright G_{4,2}$.

Утверждение 5.11. $G_{4,2}$: ГKM-многообразие.

Неподвижные точки действия — это координатные 2-плоскости:

$$p_{12} = (*, *, 0, 0)$$

$$p_{13} = (*, 0, *, 0)$$

$$p_{14} = (*, 0, 0, *)$$

$$p_{23} = (0, *, *, 0)$$

$$p_{24} = (0, *, 0, *)$$

$$p_{34} = (0, 0, *, *).$$

Инвариантные 2-сферы выглядят следующим образом. Например, имеется инвариантная 2-сфера между p_{12} и p_{13} :

$$S_{12,13} = \{\Pi \in G_{4,2} \mid (*, 0, 0, 0) \subset \Pi \subset (*, *, *, 0)\} \cong \mathbb{C}P^1$$

Аналогично, существует инвариантная сфера между любыми двумя точками, индексы которых содержат общий элемент. ГКМ-граф изображен на рис.7⁷.

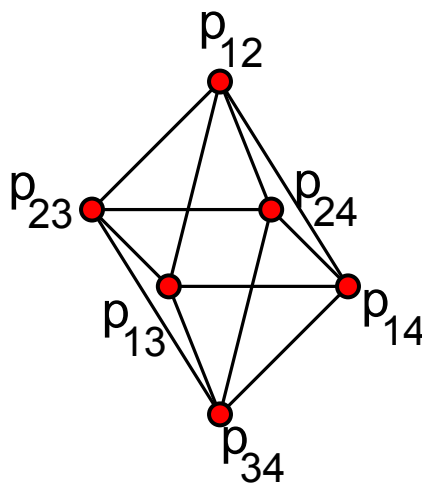


Рис. 7: ГКМ-граф для грассманиана $G_{4,2}$

Замечание 5.12. Бухштабер–Терзич недавно доказали, что $G_{4,2}/T^3 \cong S^5$. Однако, даже это утверждение довольно сложное. В общем случае пространство орбит $G_{m,n}/T^{m-1}$ неизвестно.

Пример 5.13. Пусть $F_n = \{\Pi_0 \subset \Pi_1 \subset \dots \subset \Pi_n = \mathbb{C}^n \mid \dim_{\mathbb{C}} \Pi_i = i\}$: многообразие полных флагов. Как и ранее, стандартное действие тора на \mathbb{C}^n задает эффективное действие $T^{n-1} \curvearrowright F_n$. Неподвижные точки этого действия : флаги координатных подпространств (всего их $n!$).

Упражнение 5.14. Проверить, что F_n — это ГКМ-многообразие, и описать его ГКМ-граф. (При $n = 3$ получается граф типа 3-дома-3-колодца, изображенный на рис.6).

Квазиторические многообразия Действие тора

$$T^n \curvearrowright \mathbb{C}^n \quad (t_1, \dots, t_n)(z_1, \dots, z_n) = (t_1 z_1, \dots, t_n z_n)$$

называется стандартным (действием или представлением). Если же $\mathbb{C}^n \cong V(\alpha_1) \oplus \dots \oplus V(\alpha_n)$, где веса $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \text{Hom}(T^n, S^1) \cong \mathbb{Z}^n$ образуют базис решетки, то действие называется почти стандартным. Понятно, что после определенной замены координат

⁷Октаэдр в связи с грассманианом $G_{4,2}$ возникает неспроста: см. Лекцию 7.

на торе почти стандартное действие превращается в стандартное, поэтому разница между ними невелика.

Как для стандартного, так и для почти стандартного действия имеем

$$\mathbb{C}^n/T^n \cong \mathbb{R}_{\geq 0}^n \quad (5.4)$$

Определение 5.15. Действие тора T^n на гладком (замкнутом, связном) многообразии M называется локально стандартным, если оно локально моделируется почти стандартным действием. То есть: существует атлас на M , состоящий из T -инвариантных открытых карт U_α , каждая из которых эквивариантно диффеоморфна открытому T -инвариантному подмножеству V_α в почти стандартном представлении.

Предложение 5.16. Пространство орбит локально стандартного действия имеет естественную структуру многообразия с углами.

Доказательство. Очевидно из определения и (5.4). □

Определение 5.17. Многообразие M , $\dim M = 2n$ с локально стандартным действием тора T^n называется квазиторическим, если M/T изоморфно как многообразию с углами некоторому простому выпуклому многограннику P .

6 Лекция 6. Квазиторические и момент-угол многообразия

Характеристическая функция Пусть $T^n \curvearrowright M^{2n}$: локально стандартное действие, а $Q = M/T$: многообразие с углами, возникающее в пространстве орбит. У любого многообразия с углами имеется естественное разбиение на страты, которые мы будем называть гранями многообразия с углами. Точки из внутренней Q соответствуют свободным орбитам действия, точки из внутренних гиперграней Q соответствуют орбитам коразмерности 1, и т.д.

Пусть F_1, \dots, F_m : гиперграни Q . Для любой точки $q \in F_i^\circ$ соответствующая орбита действия имеет одномерный стабилизатор. Обозначим его через $T_i \in T^n$ (понятно, что он не зависит от выбора точки из внутренней гиперграни). Если же грань $F \subset Q$ является пересечением гиперграней F_{i_1}, \dots, F_{i_k} , то для любой точки $x \in F^\circ$ стабилизатором соответствующей орбиты является торическая подгруппа $T_{i_1} \times \dots \times T_{i_k}$ (потому что это верно для почти стандартного действия). Поэтому всю информацию о стабилизаторах локально стандартного действия несут одномерные стабилизаторы.

Пусть $\lambda(i) \in \text{Hom}(S^1, T^n) \cong \mathbb{Z}^n$: гомоморфизм вложения, соответствующий одномерной подгруппе T_i . Имеем функцию:

$$\lambda: [m] = \{1, \dots, m\} \rightarrow \text{Hom}(S^1, T^n) \cong \mathbb{Z}^n$$

Она обладает очевидным свойством

$$\text{Если } F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_k} \neq \emptyset, \text{ то } \lambda(i_1), \dots, \lambda(i_k) : \text{ часть базиса решетки } \mathbb{Z}^n. \quad (6.1)$$

Эта функция называется характеристической функцией. Таким образом, роль характеристической функции — хранить информацию о всевозможных стабилизаторах действия.

Обратное построение Приведем модель, позволяющую по многограннику и характеристической функции построить квазиторическое многообразие. Зададимся простым многогранником P с гипергранями F_1, \dots, F_m и функцией $\lambda: [m] \rightarrow \mathbb{Z}^n \cong \text{Hom}(S^1, T^n)$, удовлетворяющей условию (6.1). Функция λ позволяет определить одномерные подгруппы $T_i = \text{Im } \lambda(i) \subset T^n$. Любая грань F многогранника P имеет вид $F_I = F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_k}$, где $I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset [m]$. Для любого такого I положим $T_I = T_{i_1} \times \cdots \times T_{i_k}$. Построим пространство

$$M_{(P,\lambda)} = (P \times T^n) / \sim,$$

где

$$(p_1, t_1) \sim (p_2, t_2) \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 = p_2 \in F_I^\circ \\ t_1 t_2^{-1} \in T_I. \end{cases} \quad (6.2)$$

Тор T^n естественно действует на $M_{(P,\lambda)}$, крутя вторую координату. Имеем $M_{(P,\lambda)}/T \cong P$.

Упражнение 6.1. $M_{(P,\lambda)}$ есть топологическое многообразие. (Подсказка: проверить утверждение локально, т.е. $\mathbb{R}_{\geq 0}^n \times T^n / \sim \cong \mathbb{R}^{2n}$.)

Чуть позже мы построим гладкую структуру на $M_{(P,\lambda)}$. Получается, что по любому многограннику и характеристической функции можно восстановить квазиторическое многообразие.

Эквивариантная формальность

Предложение 6.2. Пусть M : квазиторическое многообразие над многогранником P . Тогда M эквивариантно формально.

Доказательство. Покажем, что на M можно ввести совершенную клеточную структуру. Пусть $p: M \rightarrow P$ проекция на пространство орбит.

Пусть $P \subset V \cong \mathbb{R}^n$ и пусть $\phi: V \rightarrow \mathbb{R}$ функция Морса на многограннике, т.е. такая линейная функция, что $\phi(a_1) \neq \phi(a_2)$ для любых двух различных вершин a_1, a_2 многогранника P . Такую функцию можно понимать как функцию высоты.

Для каждой вершины $a \in \text{Vert}(P)$ рассмотрим грань F_a , натянутую на все ребра, идущие вниз от a (относительно функции высоты). Имеем $\dim F_a = \text{ind}(a)$, где $\text{ind}(a)$ обозначает число соседних с a вершин, лежащих ниже чем a (см. рис.8).

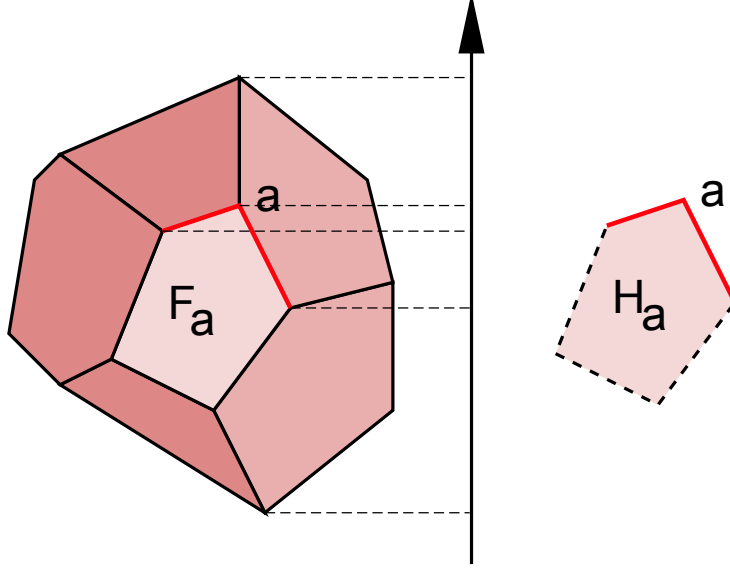


Рис. 8: Функция Морса на многограннике

Положим $H_a = F_a \setminus \bigcup_{\phi(b) < \phi(a)} F_b$. Несложно проверить, что любая точка многогранника попадает в подмножество H_a ровно для одной вершины a . Кроме того, имеем $H_a \cong \mathbb{R}_{\geq 0}^{\text{ind}(a)}$. Значит $p^{-1}(H_a) \cong \mathbb{C}^{\text{ind}(a)} \cong \mathbb{R}^{2 \text{ind}(a)}$. Получается, что подмножества $p^{-1}(H_a), a \in \text{Vert}(P)$ задают совершенное клеточное разбиение квазиторического многообразия. \square

Упражнение 6.3. Квазиторическое многообразие является ГКМ-многообразием. Описать ГКМ-граф⁸ квазиторического многообразия $M_{(P, \Lambda)}$.

Упражнение 6.4. Пусть f_{i-1} : количество $(n - i)$ -мерных граней простого многогранника P . Пусть $\phi : P \rightarrow \mathbb{R}$ функция Морса на многограннике, а $h_i = \#\{a \in \text{Vert}(P) \mid \text{ind}(a) = i\}$. Доказать, что

$$\sum_{i=0}^n h_i t^{n-i} = \sum_{i=0}^n f_{i-1} (t-1)^{n-i}.$$

Следствие 6.5. Для квазиторического многообразия M имеем

$$\beta_{2i}(M) = h_i(P), \quad \beta_{2i+1}(M) = 0.$$

Упражнение 6.6. Найти h -числа для n -симплекса, n -куба.

⁸Заметим, что в ГКМ-подходе метки ставятся на ребра, и эти метки лежат в решетке весов $\text{Hom}(T^n, S^1)$. Характеристическая функция ставит метки на гиперграни; и эти метки уже лежат в двойственной решетке $\text{Hom}(S^1, T^n)$, решетке одномерных подгрупп. Это должно подсказать ответ к упражнению.

Момент-угол многообразия У нас остались две важные задачи: (1) вычислить эквивариантные (и обычные) когомологии квазиторического многообразия, (2) задать на нем гладкую структуру. Мы это сделаем одним махом, введя новый объект: момент-угол многообразия.

Идея такова. Пусть T^m : тор, координаты которого соответствуют гиперграням многогранника. Пусть $T_I \subset T^m$: координатный подтор, соответствующий множеству индексов $I = \{i_1, \dots, i_k\}$. Тогда мы можем определить многообразие

$$\mathcal{Z}_P = (P \times T^m) / \sim,$$

где \sim определяется в точности как в (6.2). \mathcal{Z}_P называется момент-угол многообразием. Имеем $\dim \mathcal{Z}_P = m + n$. На \mathcal{Z}_P действует тор T^m .

Пусть теперь $\lambda: [m] \rightarrow \text{Hom}(S^1, T^n)$ характеристическая функция. Зададим гомоморфизм

$$\Lambda: T^m \rightarrow T^n, \quad \Lambda(t_1, \dots, t_m) = \prod_{i \in [m]} \lambda(i)(t_i).$$

Упражнение 6.7.

1. Λ сюръективен;
2. $G \stackrel{\text{def}}{=} \text{Ker } \Lambda$: подтор в T^m (т.е. связная подгруппа);
3. $\dim G = m - n$;
4. G действует свободно на \mathcal{Z}_P ;
5. $\mathcal{Z}_P/G = M_{(P,\lambda)}$.

Далее мы сделаем следующее: (1) определим гладкую структуру на \mathcal{Z}_P , относительно которой действие $T^m \curvearrowright \mathcal{Z}_P$ гладкое; (2) посчитаем $H_{T^m}^*(\mathcal{Z}_P)$. Первое позволит автоматически получить гладкую структуру на $M_{(P,\lambda)}$, а второе — посчитать $H_{T^n}^*(M_{(P,\lambda)})$.

Гладкая структура Пусть многогранник $P \subset V \cong \mathbb{R}^n$ задан как пересечение полупространств

$$P = \{x \in V \mid \langle a_i, x \rangle + c_i \geq 0, i = 1, \dots, m, a_i \in V^*, b_i \in \mathbb{R}\} \quad (6.3)$$

(считаем, что в формуле нет лишних неравенств, т.е. что $F_i = P \cap \{\langle a_i, x \rangle + c_i = 0\}$). Рассмотрим аффинное отображение

$$i_P: V \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad i_P(x) = (\langle a_1, x \rangle + c_1, \dots, \langle a_m, x \rangle + c_m)$$

Видно, что i_P инъективно, поэтому можно отождествить многогранник P и его образ $i_P(P)$. Легко видеть, что⁹ $i_P(P) = i_P(\mathbb{R}^n) \cap \mathbb{R}_{\geq 0}^m$.

⁹Мораль такова: любой многогранник можно представить в виде пересечения аффинного пространства с неотрицательным конусом. Вообще говоря, это работает и для непростых многогранников

Заметим, что существует естественное отображение $\mu: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^m$, $\mu: (z_1, \dots, z_m) = (|z_1|^2, \dots, |z_m|^2)$.

Упражнение 6.8. Доказать, что $\mu^{-1}(i_P(P)) = \mu^{-1}(i_P(\mathbb{R}^n)) \cong \mathcal{Z}_P$. Действие тора на \mathcal{Z}_P совпадает с ограничением на $\mu^{-1}(i_P(P)) \subset \mathbb{C}^m$ стандартного действия $T^m \curvearrowright \mathbb{C}^m$

Имеем коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Z}_P & \hookrightarrow & \mathbb{C}^m \\ \downarrow & & \downarrow \mu \\ P & \xrightarrow{i_P} & \mathbb{R}_{\geq 0}^m \end{array}$$

Пусть

$$r_P: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{m-n}, \quad r_P(y_1, \dots, y_m) = \begin{pmatrix} b_{1,1}y_1 + \dots + b_{1,m}y_m - d_1 \\ b_{2,1}y_1 + \dots + b_{2,m}y_m - d_2 \\ \vdots \\ b_{m-n,1}y_1 + \dots + b_{m-n,m}y_m - d_{m-n} \end{pmatrix}$$

такое аффинное отображение, что $r_P^{-1}(0) = i_P(\mathbb{R}^n)$. Получаем $\mathcal{Z}_P = (r_P \circ \mu)^{-1}$, т.е. пространство \mathcal{Z}_P состоит из всех $(z_1, \dots, z_m) \in \mathbb{C}^m$, удовлетворяющих условиям

$$\begin{cases} b_{1,1}|z_1|^2 + \dots + b_{1,m}|z_m|^2 - d_1 = 0 \\ b_{2,1}|z_1|^2 + \dots + b_{2,m}|z_m|^2 - d_2 = 0 \\ \dots \\ b_{m-n,1}|z_1|^2 + \dots + b_{m-n,m}|z_m|^2 - d_{m-n} = 0. \end{cases}$$

Значит \mathcal{Z}_P задается как пересечение вещественных квадратиков.

Упражнение 6.9. Доказать, что если P простой, то \mathcal{Z}_P является невырожденным пересечением квадратиков.

Значит \mathcal{Z}_P : гладкое многообразие. Гладкость действия $T^m \curvearrowright \mathcal{Z}_P$ очевидна. Поскольку тор $G = \text{Кер } \Lambda \cong T^{m-n}$ действует на \mathcal{Z}_P гладко и свободно, пространство орбит $\mathcal{Z}_P/G \cong M_{(P,\lambda)}$ также является гладким многообразием.

Упражнение 6.10. Описать момент-угол многообразия, соответствующее квазиторическому многообразию $\mathbb{C}P^n$.

Эквивариантные когомологии Нам потребуется важное определение. Пусть K : симплициальный комплекс на множестве $[m]$, R : поле или кольцо \mathbb{Z} , $R[m] = R[v_1, \dots, v_m]$, $\deg v_i = 2$.

Определение 6.11. Алгеброй Стенли–Райснера симплициального комплекса K называется фактор-алгебра

$$R[K] = R[m]/(v_{i_1} \cdots v_{i_k} \mid \{i_1, \dots, i_k\} \notin K).$$

Естественный гомоморфизм $R[m] \rightarrow R[K]$ превращает $R[K]$ в $R[m]$ -модуль.

Каждый простой многогранник P определяет двойственную симплициальную сферу

$$K_P = \{I = \{i_1, \dots, i_k\} \subset [m] \mid F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} \neq \emptyset\}.$$

Теорема 6.12. *Имеется изоморфизм $R[m]$ -алгебр $H_{T^m}^*(\mathcal{Z}_P; R) \cong R[K_P]$.*

Доказательство будет потом.

Следствие 6.13. *Кольцо $H_{T^n}^*(M_{(P,\lambda)}; R)$ изоморфно кольцу Стенли–Райснера $R[K_P]$. Структура $H^*(BT^n)$ -модуля на $H_{T^n}^*(M_{(P,\lambda)})$ совпадает со структурой $H^*(BT^n)$ -модуля на $R[K_P]$, заданной последовательностью гомоморфизмов колец*

$$H^*(BT^n) \xrightarrow{B\Lambda^*} H^*(BT^m) \cong R[m] \rightarrow R[K].$$

Доказательство. Следует из более общего утверждения

Упражнение 6.14. Пусть G действует на X слева, $H \subseteq G$ нормальная подгруппа, и действие H на X свободно. Тогда $H_{G/H}^*(X/H) \cong H_G^*(X)$, причем структура $H^*(B(G/H))$ -модуля на $H_{G/H}^*(X/H)$ задается посредством гомоморфизма колец

$$H^*(B(G/H)) \rightarrow H^*(BG) \rightarrow H_G^*(X).$$

□

Следствие 6.15. *$H^*(M_{(P,\lambda)}; R) \cong R[K_P]/(\theta_1, \dots, \theta_n)$, где $\theta_1, \dots, \theta_n$: образы порождающих группы $H^2(BT^n; R)$ при индуцированном гомоморфизме*

$$H^2(BT^n; R) \xrightarrow{B\Lambda^*} H^2(BT^m; R) \cong R[m] \rightarrow R[K_P].$$

В координатном виде: пусть $\lambda(i) = (\lambda_{i,1}, \dots, \lambda_{i,n}) \in \mathbb{Z}^n$, $i = 1, \dots, m$. Тогда $\theta_j = \sum_{i \in [m]} \lambda_{i,j} v_j \in R[K_P]_2$.

Доказательство. Поскольку $M_{(P,\lambda)}$ эквивариантно формально (предложение 6.2), имеем $H^*(M_{(P,\lambda)}) \cong H_T^*(M_{(P,\lambda)})/R[n]_+ H_T^*(M_{(P,\lambda)})$. Дальнейшее следует из явного задания $R[n]$ -модульной структуры на $H_T^*(M_{(P,\lambda)})$. □

Следствие 6.16. *$R[K_P]$ является свободным модулем над своим подкольцом¹⁰, порожденным элементами $\theta_1, \dots, \theta_n \in R[K_P]_2$.*

Таким образом, когомологии квазиторических многообразий являются фактором кольца многочленов $R[v_1, \dots, v_m]$, $\deg v_i = 2$, по двум типам соотношений:

$$v_{i_1} \cdots v_{i_k}, \text{ если } F_{i_1} \cap \dots \cap F_{i_k} = \emptyset \quad (\text{соотношения Стенли–Райснера})$$

$$\theta_j = \lambda_{1,j} v_1 + \dots + \lambda_{m,j} v_m, \quad j = 1, \dots, n \quad (\text{линейные соотношения})$$

Упражнение 6.17. Описать эквивариантные и обычные когомологии для квазиторического многообразия $\mathbb{C}P^n$, пользуясь следствием 6.15.

Упражнение 6.18. Описать эквивариантные и обычные когомологии поверхности Хирцебруха, т.е. 4-мерного многообразия, характеристические данные которого изображены на рис.9. Здесь $a \in \mathbb{Z}$: произвольный параметр.

¹⁰Это свойство кольца называется Коэн–Маколеевостью. Имеется большая теория, описывающая, для каких симплициальных комплексов K кольцо $R[K]$ является кольцом Коэна–Маколея

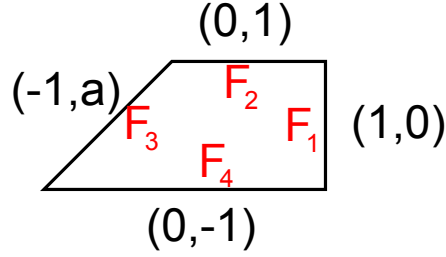


Рис. 9: Многогранник орбит и характеристическая функция для поверхности Хирцебруха

7 Лекция 7. Симплектический ликбез

Формула Картана Пусть M : связное гладкое ориентируемое $2n$ -мерное многообразие. Напомним, что $\Omega^k(M)$ обозначает векторное пространство дифференциальных k -форм на M (абстрактно, $\Omega^k(M) = \Gamma(\Lambda^k T^*M)$: пространство гладких сечений k -ой внешней степени кокасательного расслоения). Имеется комплекс де Рама

$$0 \rightarrow \Omega^0(M) \xrightarrow{d} \Omega^1(M) \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \Omega^{2n}(M) \rightarrow 0, \quad (7.1)$$

когомологии которого в компактном случае совпадают с $H^*(M; \mathbb{R})$ по теореме де Рама. Пространство $\Omega^0(M)$ совпадает пространством $C^\infty(M)$ гладких функций на M , а $\Omega^1(M)$ — с пространством ковекторных полей. Дифференциальные формы можно перемножать, поэтому $\Omega^*(M) = \bigoplus_k \Omega^k(M)$ имеет структуру градуированно коммутативной алгебры, эта структура индуцирует стандартное умножение в когомологиях.

Пусть $\xi \in \Gamma(TM)$: векторное поле на M . С ним ассоциируются две операции на комплексе де Рама:

$$i_\xi : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^{k-1}(M); \quad \mathcal{L}_\xi : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M).$$

Операция i_ξ (свертка формы с вектором) просто подставляет поле ξ в один из аргументов формы:

$$i_\xi(a)(\eta_1, \dots, \eta_{k-1}) = a(\xi, \eta_1, \dots, \eta_{k-1}), \quad (7.2)$$

где $\eta_1, \dots, \eta_{k-1}$: произвольные векторные поля. Производная Ли \mathcal{L}_ξ дифференцирует форму вдоль векторного поля:

$$\mathcal{L}_\xi(a)(\eta_1, \dots, \eta_k) = \xi a(\eta_1, \dots, \eta_k) - \sum_j a(\eta_1, \dots, [\xi, \eta_j], \dots, \eta_k),$$

где $[\xi, \eta]$: коммутатор векторных полей. Производная Ли показывает скорость изменения тензора при однопараметрическом семействе диффеоморфизмов, порожденном векторным полем ξ .

Имеется следующее фундаментальное соотношение (тождество Картана, “инфинитезимальная гомотопия”, “волшебная формула Картана”):

$$\mathcal{L}_\xi = i_\xi d + di_\xi : \Omega^k(M) \rightarrow \Omega^k(M). \quad (7.3)$$

Упражнение 7.1. Доказать формулу Картана. Тут полезно воспользоваться таким определением дифференциала:

$$da(\eta_0, \dots, \eta_k) = \sum_{s=0}^k (-1)^s \eta_s a(\eta_0, \dots, \widehat{\eta}_s, \dots, \eta_k) + \sum_{0 \leq s < r \leq k} (-1)^{s+r} a([\eta_s, \eta_r], \eta_0, \dots, \widehat{\eta}_s, \dots, \widehat{\eta}_r, \dots, \eta_k).$$

Симплектические многообразия

Определение 7.2. Форма $\omega \in \Omega^2(M)$ называется симплектической, если она замкнута: $d\omega = 0$, и невырождена: $\omega_x^n \neq 0$ во всех точках $x \in M$.

Таким образом, ω — это поле невырожденных кососимметричных форм на касательном пространстве. При помощи симплектической формы можно “переносить индексы”, в частности превращать векторные поля в ковекторные поля и наоборот. Если $\xi \in \Gamma(TM)$ векторное поле, то можно рассмотреть ковекторное поле $i_{\xi_M}\omega = \omega(\xi, \cdot) \in \Gamma(T^*M) = \Omega^1(M)$, значение которого на касательном векторе $\eta \in T_x M$ равно $\omega_x(\xi_x, \eta) \in \mathbb{R}$.

Пусть S^1 гладко действует на M . Такое действие задает векторное поле ξ_M на M , порожденное инфинитезимальными сдвигами вдоль действия¹¹

Определение 7.3. Эффективное действие окружности S^1 на симплектическом многообразии (M, ω) называется гамильтоновым с гамильтонианом $H: M \rightarrow \mathbb{R}$, если $i_{\xi_M}\omega = dH$.

Из формулы Картана выводится:

Упражнение 7.4. Докажите, что гамильтоново действие окружности сохраняет симплектическую форму: $\mathcal{L}_{\xi_M}\omega = 0$.

Упражнение 7.5. Докажите, что если действие окружности сохраняет симплектическую форму ω , то 1-форма $i_{\xi_M}\omega$ замкнута. Если, кроме того, $H^1(M, \mathbb{R}) = 0$, то действие гамильтоново.

Упражнение 7.6. Доказать, что орбиты гамильтонова действия окружности (т.е. траектории векторного поля ξ_M) лежат в гиперповерхности $H = \text{const}$.

Мы хотим рассматривать одновременное действие нескольких окружностей, которые в некотором смысле независимы и имеют каждое свой гамильтониан. Удобно склеить все эти гамильтонианы в одну функцию $M \rightarrow \mathbb{R}^k$, которая будет называться отображением моментов. Пусть $T = T^k$: компактный тор, гладко действующий на M , а $\mathfrak{t} \cong \mathbb{R}^k$ его алгебра Ли. Каждый вектор $\xi \in \mathfrak{t}$ порождает векторное поле ξ_M на M (инфинитезимальные сдвиги в направлении ξ).

¹¹Строго говоря, нужно рассмотреть элемент $e^{2\pi it} \in S^1$, $t \in (\epsilon, \epsilon)$. Тогда $(\xi_M)_x$ — это касательный вектор к кривой $e^{2\pi it}x$ на M в точке $t = 0$.

Определение 7.7. Эффективное действие тора T^k на симплектическом многообразии (M, ω) называется гамильтоновым с отображением моментов $\mu: M \rightarrow \mathfrak{t}^* \cong \mathbb{R}^k$, если

$$i_{\xi_M} \omega = d\langle \mu, \xi \rangle \quad (7.4)$$

для любого вектора $\xi \in \mathfrak{t}$. Здесь $\langle \mu, \xi \rangle: M \rightarrow \mathbb{R}$ — функция на M , значение которой в точке $x \in M$ равно $\langle \mu(x), \xi \rangle$ (спаривание элемента из \mathfrak{t}^* и элемента из \mathfrak{t}).

Упражнение 7.8. Сформулировать и доказать аналоги упражнений 7.4–7.6 для гамильтоновых действий тора.

Упражнение 7.9. Для гамильтонова действия T^k на M^{2n} выполнено $k \leq n$.

Поскольку отображение моментов постоянно на орбитах, имеем индуцированное отображение:

$$\tilde{\mu}: M^{2n}/T^k \rightarrow \mathfrak{t}^* \cong \mathbb{R}^k \quad (7.5)$$

Теорема 7.10 (Атья–Гийемин–Стернберг). Если M замкнуто, то $\mu(M) \subset \mathfrak{t}^* \cong \mathbb{R}^k$ является выпуклым многогранником. Более того, образ отображения моментов совпадает с выпуклой оболочкой образов неподвижных точек:

$$\mu(M) = \text{conv } \mu(F).$$

Эту теорему мы доказывать не будем (см. [2, 13]).

Пример 7.11. Известно, что грассманиан $G_{4,2}$ является симплектическим многообразием, и действие $T^3 \curvearrowright G_{4,2}$ гамильтоново. Образом отображения моментов в этом случае является октаэдр, см. рис. 7. Для общих грассманианов возникают т.н. гиперсимплексы (сечения m -мерного куба гиперплоскостью, перпендикулярной главной диагонали, и проходящей через вершину).

Теорема 7.12 (Атья–Ботт–Кирван). Если M компактно и действие $T \curvearrowright M$ гамильтоново, то M эквивариантно формально.

Эта теорема опирается на эквивариантную теорию Морса, см. [3, 18]. Ее мы тоже не будем доказывать.

Максимальные действия Согласно упражнению 7.9, на многообразии размерности $2n$ не может действовать тор размерности больше n . Случай, когда равенство достигается, очень важен.

Определение 7.13. Замкнутое многообразие M , $\dim M = 2n$ называется симплектическим торическим многообразием, если на нем задано гамильтоново действие тора T^n с отображением моментов $\mu: M \rightarrow \mathfrak{t}^* \cong \mathbb{R}^n$.

Определение 7.14. Пусть $P \subset \mathbb{R}^n \supset \mathbb{Z}^n$: выпуклый многогранник в пространстве с фиксированной решеткой. P называется многогранником Дельзана, если

1. P простой;
2. Нормали $\nu_i \in (\mathbb{R}^n)^*$ к гиперграням $F_i \subset P$ являются целочисленными (относительно двойственной решетки $(\mathbb{Z}^n)^*$)
3. Для любой вершины v многогранника P нормали к гиперграням, содержащим v , образуют базис решетки.

Пример 7.15. См. рис. 10.

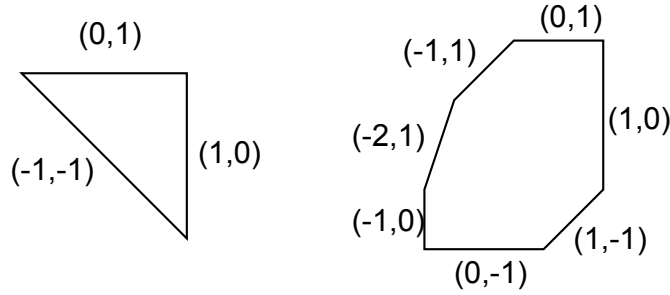


Рис. 10: Многогранники Дельзана и нормальные векторы к их гиперграням

Заметим, что в алгебре Ли \mathfrak{t} имеется естественная решетка:

$$\text{Ker}(\exp: \mathfrak{t} \rightarrow T^n) \cong \mathbb{Z}^n.$$

Теорема 7.16 (Дельзан, [9]). Пусть M : симплектическое торическое многообразие. Тогда

1. $P = \mu(M)$: многогранник Дельзана;
2. отображение $\tilde{\mu}: M/T \rightarrow P$ является гомеоморфизмом (т.е. прообраз каждой точки при отображении моментов — это ровно одна орбита действия).
3. Имеется взаимно-однозначное соответствие

$$\{\text{Симплектические торические многообразия}\} \longleftrightarrow \{\text{многогранники Дельзана в } \mathbb{R}^n\}$$

с точностью до эквивариантного симплектоморфизма слева и определенных аффинных преобразований справа.

Для многогранника Дельзана P будем обозначать соответствующее симплектическое многообразие M_P . Теорему Дельзана мы полностью доказывать не будем, однако опишем процедуру, позволяющую построить M_P по P .

Замечание 7.17. Видно, что нормали к гиперграням многогранника Дельзана P задают характеристическую функцию: $\nu: [m] \rightarrow \mathbb{Z}^n$. Симплектическое торическое многообразие M_P , как гладкое многообразие, совпадает с квазиторическим многообразием $M_{(P, \nu)}$.

Симплектическая редукция Пусть $T^k \curvearrowright M^{2n}$: гамильтоново действие тора с отображением моментов $\mu: M \rightarrow \mathbb{R}^k$. Пусть $a \in \mathbb{R}^k$: регулярное значение гладкого отображения μ (т.е. для всех $x \in M$, $\mu(x) = a$ дифференциал $d\mu_x: T_x M \rightarrow T_a \mathbb{R}^k$ эпиморфен). Тогда $Z_a \stackrel{\text{def}}{=} \mu^{-1}(a) \subset M$ является гладким подмногообразием размерности $2n - k$. Ограничение симплектической формы ω на Z_a уже не является невырожденной формой. Однако, несложно проверить, что $\text{Ker } \omega|_{T_x Z_a}$ состоит в точности из направлений вдоль действия тора, причем эти направления образуют k -мерное векторное подпространство, т.е. действие T^k на Z почти свободно (т.е. имеет лишь конечные стабилизаторы). Значит, на фактор-многообразии (вообще говоря, орбиформе)

$$M//_a T^k \stackrel{\text{def}}{=} Z_a/T^k, \quad \dim(M//_a T^k) = 2n - 2k$$

имеется корректно определенная симплектическая форма (поскольку ядро формы $\omega|_{Z_a}$ убивается факторизацией по орбитам действия¹²). Процедура перехода от M к $M//_a T^k$ называется симплектической редукцией.

Замечание 7.18. Часто в качестве точки a берут $0 \in \mathfrak{t}^*$. Общность от этого не страдает, поскольку отображение моментов определено с точностью до параллельного сдвига (условие на гамильтониан не меняется, если прибавить к нему константу; поэтому можно произвольную точку a утащить в 0).

Вопрос 7.19. Что дает симплектическая редукция от симплектического торического многообразия?

Действие подгруппы и остаточное действие Вообще говоря, симплектическая редукция от симплектического многообразия с гамильтоновым действием дает симплектическое многообразие уже без действия. Это нетрудно исправить, рассматривая “остаточные действия”.

Упражнение 7.20. Пусть $T = T^k$ гамильтоново действует на M^{2n} с отображением моментов $\mu: M \rightarrow \mathfrak{t}^*$ и $G \subset T$: связная подгруппа. Пусть $\mathfrak{t}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*$ проекция, индуцированная вложением $G \hookrightarrow T$. Тогда индуцированное действие $G \curvearrowright M$ является гамильтоновым с отображением моментов

$$M \xrightarrow{\mu} \mathfrak{t}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*.$$

Упражнение 7.21. В условиях предыдущего упражнения доказать, что $M//_0 G$ несет остаточное действие группы T/G , причем это действие гамильтоново с естественно определенным отображением моментов $M//_0 G \rightarrow (\mathfrak{t}/\mathfrak{g})^* = \text{Ker}(\mathfrak{t}^* \rightarrow \mathfrak{g}^*)$.

Стандартный пример Имеется (некомпактное, но и ладно) многообразие $\mathbb{R}^{2m} \cong \mathbb{C}^m$ с симплектической формой

$$\omega = \sum_{j=1}^m dp_j \wedge dq_j, \quad z_j = p_j + \sqrt{-1}q_j,$$

¹²Тот факт, что на многообразии орбит возникает именно замкнутая форма не вполне тривиален. Это называется теоремой Марседена–Вейнштейна

и стандартным действием тора $T^m \curvearrowright \mathbb{C}^m$. Легко показать, что стандартное действие гамильтоново с отображением моментов

$$\mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}^m \subset \mathfrak{t}, \quad (z_1, \dots, z_m) \mapsto (|z_1|^2, \dots, |z_m|^2).$$

Симплектической редукцией по всевозможным подгруппам $G \subset T^m$ можно получать симплектические торические многообразия.

Упражнение 7.22. Пусть P^n : многогранник Дельзана,

$$\nu: [m] \rightarrow \mathbb{Z}^n \cong \text{Hom}(S^1, T^n)$$

— характеристическая функция, сопоставляющая каждой гипергранни ее нормальный вектор, а $\Lambda_\nu: T^m \rightarrow T^n$ гомоморфизм торов, определенный характеристической функцией ν . Пусть $G = \text{Ker } \Lambda_\nu$, G : торическая подгруппа в T^m размерности $m - n$. Для индуцированного гамильтонова действия тора G на \mathbb{C}^m имеем

1. Прообраз регулярного значения $d \in \mathfrak{g}^*$ отображения моментов $\mu_G: \mathbb{C}^m \rightarrow \mathfrak{g}^*$ является момент-угол многообразием \mathcal{Z}_P многогранника P .
2. Симплектическая редукция $\mathbb{C}^m //_d G$ совпадает с квазиторическим многообразием $M_{(P, \nu)}$.
3. Симплектическая редукция $\mathbb{C}^m //_d G$ является симплектическим торическим многообразием с остаточным действием тора $T^n \cong T^m / G$.
4. При подходящем выборе регулярного значения $d \in \mathfrak{g}^*$ многогранником моментов симплектического торического многообразия $\mathbb{C}^m //_d G$ является сам многогранник P . (В этом случае мы полагаем $M_P \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C}^m //_d G$).

Мы по многограннику Дельзана построили симплектическое торическое многообразие, фактически показав, что нужное квазиторическое многообразие получается из стандартного действия на \mathbb{C}^m симплектической редукцией. Таким образом, симплектическое торическое многообразие — это частный случай квазиторического. В частности, для симплектических торических верны следствия 6.13, 6.15.

Пример 7.23. Применение симплектической редукции к действию диагональной подгруппы $\{(t, t, \dots, t)\} \in T^{n+1}$ на \mathbb{C}^{n+1} , задает симплектическую форму на многообразии $\mathbb{C}P^n$. Эта форма (нормализованная таким образом, чтобы ее многогранником моментов был прямоугольный симплекс $\text{conv}(0, -e_1, \dots, -e_n)$) называется формой Фубини–Штуди, обозначение ω_{FS} .

Замечание 7.24. Если $M \subset \mathbb{C}P^N$: комплексное подмногообразие, то ограничение $\omega_{\text{FS}}|_M$ задает симплектическую форму на M . В частности, это замечание позволяет задать симплектическую форму на произвольном гладком проективном многообразии.

Теорема Дёйстермата–Хекмана Помимо теоремы Атьи–Гийемина–Стернберга в теории гамильтоновых действий есть еще один фундаментальный результат. Это обобщение теоремы Архимеда, упомянутое в первой лекции.

Пусть задано гамильтоново действие $T = T^k \cup M = M^{2n}$ с отображением моментов $\mu: M \rightarrow \mathfrak{t}^*$. Заметим, что на векторном пространстве $\mathfrak{t}^* \cong \mathbb{R}^k$ есть стандартная евклидова мера Vol_{eucl} (т.е. трансляционно-инвариантная мера¹³). На самом многообразии M имеется симплектический объем, т.е.

$$\text{Vol}_{\text{symp}}(B) = \int_B \omega^n \text{ для } B \subset M.$$

Рассмотрим $\mu_*\text{Vol}_{\text{symp}}$: прямой образ меры Vol_{symp} при отображении моментов:

$$\mu_*\text{Vol}_{\text{symp}}(A) = \text{Vol}_{\text{symp}}(\mu^{-1}(A)), \text{ для } A \subset \mathbb{R}^k.$$

Замечание 7.25. Имея две меры Vol_1 и Vol_2 на одном пространстве X , можно рассмотреть их производную Радона–Никодима $\frac{d\text{Vol}_2}{d\text{Vol}_1}$, т.е. такую функцию $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, что $\text{Vol}_2(A) = \int_A f d\text{Vol}_1$. Вообще говоря, она существует только если Vol_2 абсолютно непрерывна относительно Vol_1 . В наших примерах это условие будет выполнено.

Теорема 7.26 (Дёйстермат–Хекман, [4, 11]). *Для гамильтонова действия $T = T^k$ на компактном многообразии $M = M^{2n}$ с отображением моментов $\mu: M \rightarrow \mathfrak{t}^*$ производная Радона–Никодима*

$$\text{DH}_M \stackrel{\text{def}}{=} \frac{d\mu_*\text{Vol}_{\text{symp}}}{d\text{Vol}_{\text{eucl}}}$$

является кусочно полиномиальной функцией степени не больше $n - k$.

Иными словами, плотность распределения образа симплектической меры является полиномиальным сплайном. Для симплектических торических многообразий получаем аналог теоремы Архимеда из Лекции 1:

Теорема 7.27. *Если M_P : симплектическое торическое многообразие с многогранником моментов P , то*

$$\text{DH}_{M_P} = C \cdot \mathbb{I}_P$$

где C : универсальная константа, а \mathbb{I}_P : индикаторная функция многогранника P :

$$\mathbb{I}_P(x) = \begin{cases} 1, & x \in P; \\ 0, & x \notin P. \end{cases}$$

Таким образом, для любого борелевского множества $A \subset P$ выполнено $\text{Vol}_{\text{symp}} \mu^{-1}(A) = C \cdot \text{Vol}_{\text{eucl}}(A)$.

¹³Можно нормировать меру, положив ее равной 1 на фундаментальном параллелепипеде решетки: выделенная решетка в \mathfrak{t}^* имеется: это решетка весов $\text{Hom}(T^n, S^1) \subset \mathfrak{t}^*$. Нормированная евклидова мера определена однозначно.

Удивительным образом эти теоремы можно вывести из теоремы об эквивариантной локализации. Это, однако, требует еще подготовительной работы.

Замечание 7.28. У функции DH_M на \mathfrak{t}^* есть прозрачный геометрический смысл: значение функции DH_M в регулярном значении $a \in \mathfrak{t}^*$ равно $\text{Vol}_{\text{symp}}(M//_a T)$. Обосновывать это мы, однако, не будем.

Дополнение: симплектическая ГKM-теория

Упражнение 7.29. Пусть $T^k \curvearrowright M = M^{2n}$ гамильтоново действие и, кроме того, M : ГKM-многообразие с эквивариантным 1-остовом M^1 . Докажите что $\mu(M^1)$: граф в \mathfrak{t}^* , ребра которого суть прямые отрезки с направляющими векторами a_{pq} . Напомним, что $\alpha_{pq} \in \text{Hom}(T^k, S^1)$: метка на ребре ГKM-графа, равная весу действия на соответствующей инвариантной 2-сфере, а $a_{pq} \in \mathfrak{t}^* \cong H^2(BT^k)$: соответствующий элемент в когомологиях.

Иными словами, в симплектической ситуации ГKM-граф геометрически реализован в \mathfrak{t}^* . Геометрическую реализацию ГKM-графа, в которой все ребра прямые и сонаправлены своим меткам, мы будем называть геометрическим ГKM-графом.

Упражнение 7.30. Опишите возможные формы геометрических ГKM-графов для многообразия $G_{4,2}$ и многообразия полных флагов F_3 (конкретная форма ГKM-графа может различаться за счет произвола в выборе формы ω).

Упражнение 7.31. Пусть M : ГKM-многообразие и $H^1(M; \mathbb{R}) = 0$. Докажите, что конфигурационное пространство всех возможных геометрических ГKM-графов для M по модулю параллельных сдвигов можно отождествить с $H^2(M; \mathbb{R})$. См. [5, 15].

Замечание 7.32. Заметим напоследок, что невырожденность формы ω нигде особенно не использовалась. Действительно, отображение моментов можно определить по формуле (7.4), для произвольной замкнутой формы $\omega \in \Omega^2(M)$. Симплектическая ГKM-теория и теорема Дёйстермата–Хекмана верны в общей ситуации. Для ГKM-теории — это упражнение, а теорему Дёйстермата–Хекмана мы докажем методом, который отлично работает для произвольных форм. Заметим однако, что теоремы Атьи–Гийемина–Стернберга и Дельзана верны только в невырожденном случае — в них симплектическая геометрия по существу.

8 Лекция 8. Эквивариантная топология многообразий

Глобальная мысль этой лекции такова: у всего, что изучается в алгебраической топологии, есть эквивариантные аналоги. Они, как правило, получаются применением классических построений к конструкции Бореля.

Эквивариантные расслоения и характеристические классы

Определение 8.1. Векторное расслоение $\xi: E \rightarrow B$ называется G -эквивариантным, если задано левое действие G на пространствах E, B , отображение ξ эквивариантно, и индуцированное действие на слоях линейно.

Замечание 8.2. G -эквивариантные расслоения это НЕ то же самое, что расслоения со структурной группой G . Структурная группа действует на слое и задает функции перехода. В случае G -эквивариантного расслоения, группа является симметрией на всем пространстве (и тотальном, и базе).

Пример 8.3. Векторное представление группы G можно понимать как G -эквивариантное расслоение над точкой.

Пример 8.4. Если M — гладкое многообразие, и действие $G \curvearrowright M$ гладкое, то дифференциал действия превращает касательное расслоение TM в G -эквивариантное расслоение. Если $N \subset M$ — гладкое подмногообразие, сохраняемое действием G , то нормальное расслоение $\nu_N = \nu_{N \subset M}$ является G -эквивариантным.

Свойство G -эквивариантности очевидным образом индуцируется. Если $\xi: E \rightarrow B$ — G -эквивариантное векторное расслоение, и $f: X \rightarrow B$ — G -эквивариантное отображение, то $f^*\xi: f^*E \rightarrow B$ — G -эквивариантное векторное расслоение.

Определение 8.5. Эквивариантным характеристическим классом G -эквивариантных векторных расслоений называется правило, которое каждому такому расслоению $\xi: E \rightarrow B$ сопоставляет эквивариантный когомологический класс $c(\xi) \in H_G^*(B)$ таким образом, что для любого G -эквивариантного отображения $f: X \rightarrow B$ имеем

$$c(f^*\xi) = f^*(c(\xi)). \quad (8.1)$$

Здесь слева $f^*\xi$ — индуцированное расслоение, а справа $f^*: H_G^*(B) \rightarrow H_G^*(X)$ — индуцированный гомоморфизм колец эквивариантных когомологий.

Дешевый способ построить эквивариантный хар.класс — перейти к конструкции Бореля, и рассмотреть обычный хар.класс. Пусть $\xi: E \rightarrow B$ — G -эквивариантное векторное расслоение. Индуцированное отображение конструкций Бореля

$$\xi_G: E_G \rightarrow B_G$$

является обычным векторным расслоением. Обычные хар.классы от него принимают значение в $H^*(B_G) = H_G^*(B)$. Естественность построенных классов очевидна. Далее будем считать, что $G = T$.

Определение 8.6. Определим эквивариантные классы Черна, Понтрягина, Штифеля–Уитни и Эйлера T -эквивариантного векторного расслоения $\xi: E \rightarrow B$ по формулам

$$\begin{aligned} c_i^T(\xi) &\stackrel{\text{def}}{=} c_i(\xi_T) \in H_T^{2i}(B; R); \\ p_i^T(\xi) &\stackrel{\text{def}}{=} p_i(\xi_T) \in H_T^{4i}(B; R); \\ w_i^T(\xi) &\stackrel{\text{def}}{=} w_i(\xi_T) \in H_T^i(B; \mathbb{Z}_2); \\ e^T(\xi) &\stackrel{\text{def}}{=} e(\xi_T) \in H_T^n(B; R). \end{aligned}$$

Условия применимости определений те же, что и для неэквивариантных классов:

1. классы Черна берутся от комплексных расслоений, R любое;
2. классы Понтрягина берутся от вещественных расслоений, R содержит $\frac{1}{2}$;
3. классы Штифеля–Уитни берутся от вещественных расслоений, коэффициенты в поле \mathbb{Z}_2 , либо его расширениях;
4. класс Эйлера берется от ориентированного вещественного расслоения ранга n .

Универсальность определения автоматически означает, что все свойства, такие как формулы произведения, переносятся на эквивариантный случай. В частности

Утверждение 8.7. Пусть ξ : эквивариантное комплексное расслоение. Тогда

$$e^T(\xi_{\mathbb{R}}) = c_n^T(\xi).$$

Упражнение 8.8. Пусть $V(\alpha)$: одномерное комплексное представление тора $T = T^n$ веса $\alpha \in \text{Hom}(T^n, S^1)$ (см.(5.2)), а $\xi : V(\alpha) \rightarrow \text{pt}$: соответствующее ему расслоение над точкой. Тогда

$$e^T(\xi) = c_1^T(\xi) = a \in H_T^2(\text{pt}) = \mathbb{R}[n],$$

где a : элемент, соответствующий весу α (на самом деле, решетку весов $\text{Hom}(T^n, S^1)$ можно считать вложенной в $\mathfrak{t}^* \cong H_T^2(\text{pt})$, см. замечание 5.3. В этом смысле, элемент a — это и есть элемент α).

Упражнение 8.9. Пусть ξ : эквивариантное расслоение над точкой, соответствующее представлению $V(\alpha_1) \oplus \dots \oplus V(\alpha_n)$. Тогда

$$c_n^T(\xi) = e^T(\xi) = a_1 \cdots a_n \in H_T^{2n}(\text{pt}) = \mathbb{R}[n]$$

Видно, что в эквивариантном случае хар.классы могут быть нетривиальны даже у расслоения над точкой.

Гомоморфизм прямого образа (гомоморфизма Гизина) в неэквивариантном случае В неэквивариантной науке имеются следующие важные понятия:

1. Двойственность Пуанкаре на (замкнутых ориентируемых) многообразиях:

$$D: H^*(M) \cong H_{m-*}(M), \quad m = \dim M.$$

2. Гомоморфизм прямого образа для когомологий многообразий. Пусть $f: N \rightarrow M$: отображение (замкнутых ориентированных) многообразий, $\dim N = n$, $\dim M =$

m . Тогда имеется гомоморфизм модулей $f_*: H^*(N) \rightarrow H^{*+(m-n)}(M)$, который определяется из диаграммы

$$\begin{array}{ccc} H^*(N) & \xrightarrow{f_*} & H^{*+m-n}(M) \\ \cong \downarrow D & & \cong \uparrow D^{-1} \\ H_{n-*}(N) & \xrightarrow{f_*} & H_{n-*}(M) \end{array}$$

Внизу стоит гомоморфизм гомологий, индуцированный отображением f .

Для отображения в точку $p: N \rightarrow \text{pt}$ гомоморфизм прямого образа $p_*: H^n(N) \rightarrow H^0(\text{pt})$ совпадает с отображением интегрирования по многообразию (т.е. спаривания с фундаментальным классом)¹⁴:

$$p_*(\alpha) = \int_N \alpha = \langle \alpha, [N] \rangle.$$

В случае, когда $f: N \hookrightarrow M$: вложение гладкого подмногообразия в гладкое многообразие, имеется эквивалентная интерпретация отображения прямого образа, которую мы сейчас вкратце повторим.

Для произвольного ориентируемого векторного расслоения $\eta: E \rightarrow B$ ранга d имеется изоморфизм Тома

$$H^*(B) \xrightarrow{\cong} H^{*+d}(E, E \setminus B),$$

где B рассматривается как нулевое сечение в E . При этом изоморфизме $1 \in H^0(B)$ переходит в класс Тома $\text{th}(\eta) \in H^d(E, E \setminus B)$, и, более общо, класс $\alpha \in H^k(B)$ переходит в $\alpha \smile \text{th}(\eta)$. Образ класса Тома $\text{th}(\eta)$ при гомоморфизме $H^d(E, E \setminus B) \rightarrow H^d(E) \xrightarrow{\cong} H^d(B)$ совпадает с классом Эйлера $e(\eta)$.

Пусть $f: N^n \hookrightarrow M^m$: вложение ориентируемого гладкого подмногообразия в ориентируемое многообразие, а $\nu_N = \nu_{N \subset M}$: его нормальное расслоение с тотальным пространством $E\nu_N$. Тогда гомоморфизм прямого образа можно представить в следующем виде:

$$H^*(N) \xrightarrow{\smile \text{th}(\nu_N)} H^{*+m-n}(E\nu_N, E\nu_N \setminus N) \xrightarrow{\cong} H^{*+m-n}(M, M \setminus N) \xrightarrow{i^*} H^{*+m-n}(M)$$

f_*

Здесь первая стрелка : изоморфизм Тома, вторая стрелка следует из теоремы о трубчатой окрестности и свойства вырезания, а третья стрелка индуцирована вложением пар $i: (M, \emptyset) \rightarrow (M, M \setminus N)$.

¹⁴Более общо, в случае, когда $f: N \rightarrow M$: гладкое расслоение, $f_*: H^*(N) \rightarrow H^{*+(m-n)}(M)$ является интегрированием вдоль слоев расслоения.

Упражнение 8.10. Используя коммутативность диаграммы

$$\begin{array}{ccccc}
 H^*(N) \xrightarrow{\sim \text{th}(\nu_N)} H^{*+m-n}(E\nu_N, E\nu_N \setminus N) & \xrightarrow{\cong} & H^{*+m-n}(M, M \setminus N) & \xrightarrow{i^*} & H^{*+m-n}(M) \\
 \downarrow & & & \swarrow & \\
 H^{*+m-n}(E\nu_N) & \xrightarrow{\cong} & H^{*+m-n}(N) & &
 \end{array}$$

показать, что для вложения $f: N \hookrightarrow M$ выполнено $f^*f_*(1) = e(\nu_N) \in H^{m-n}(N)$ и, более общо, $f^*f_*(\alpha) = \alpha \smile e(\nu_N)$.

Упражнение 8.11. Доказать, что $f_*: H^*(A) \rightarrow H^{*+\dim B - \dim A}(B)$ является гомоморфизмом $H^*(B)$ -модулей, т.е. $f_*(f^*(b)a) = bf_*(a)$ для $a \in H^*(A)$, $b \in H^*(B)$.

Эквивариантный гомоморфизм прямого образа Построение эквивариантного аналога двойственности Пуанкаре осложняется тем, что у нас пока нет понятия эквивариантных гомологий. Если брать обычные гомологии от конструкции Бореля, то по некоторым причинам хорошей теории не получается¹⁵. Правильную теорию эквивариантной двойственности Пуанкаре можно строить разными способами (см., например, работу [1] и ссылки в ней), но мы этого делать не будем.

Определим гомоморфизм прямого образа в эквивариантных когомологиях напрямую. Пусть $f: N \rightarrow M$: эквивариантное отображение замкнутых T -многообразий. Зададим гомоморфизм прямого образа $f_*: H_T^*(N) \rightarrow H_T^{*+m-n}(M)$ как гомоморфизм прямого образа для конструкций Бореля:

$$f_*: H^*(N_T) \rightarrow H^{*+m-n}(M_T). \quad (8.2)$$

И все бы хорошо, но выражение (8.2), строго говоря, не имеет смысла, поскольку конструкции Бореля N_T и M_T уже не являются многообразиями — они бесконечномерны. Чтобы придать выражению (8.2) смысл, заметим, что конструкцию Бореля можно аппроксимировать многообразиями.

Действительно, универсальное пространство $ET = (S^\infty)^n$ является пределом многообразий $ET_{(k)} = (S^{2k+1})^n$, на каждом из которых действие тора свободно. Имеем

$$ET = \lim_{\rightarrow k} ET_{(k)}, \quad X_T = ET \times_T X = \lim_{\rightarrow k} (ET_{(k)} \times_T X).$$

Если X : многообразие, то каждое из пространств $X_T^{(k)} = ET_{(k)} \times_T X$ (аппроксимирующая конструкция Бореля) является многообразием. Аппроксимирующие эквивариантные когомологии $H_{T,(k)}^*(X) \stackrel{\text{def}}{=} H^*(X_T^{(k)})$ являются модулями над $H_{T,(k)}^*(\text{pt}) = H^*(ET_{(k)}/T) \cong H^*((\mathbb{C}P^k)^n)$ и обладают всевозможными естественными свойствами. Получаем, $H_T^*(X) = \lim_{\leftarrow k} H_{T,(k)}^*(X)$. Если $f: N \rightarrow M$: отображение многообразий, то

¹⁵ например, $H_*(X_T)$ не является модулем над кольцом многочленов $H^*(BT)$, а нам хочется, чтобы и гомологии и двойственность Пуанкаре работали в некотором смысле в категории модулей

индуцированное отображение аппроксимирующих конструкций Бореля $f_T^{(k)}: N_T^{(k)} \rightarrow M_T^{(k)}$ задает гомоморфизм прямого образа

$$f_*^{(k)}: H_{T,(k)}^*(N) \rightarrow H_{T,(k)}^{*+m-n}(M). \quad (8.3)$$

Упражнение 8.12. Доказать, что гомоморфизмы $f_*^{(k)}$ согласованы при различных k (это содержательная проверка).

Значит, $f_*: H_T^*(N) \rightarrow H_T^{*+m-n}(M)$ можно определить как предел гомоморфизмов (8.3).

Упражнение 8.13. Доказать, что $f_*: H_T^*(N) \rightarrow H_T^{*+m-n}(M)$ является гомоморфизмом $H^*(BT)$ -модулей.

Определение 8.14. Пусть $\alpha \in H_T^k(X)$: эквивариантный когомологический класс T -многообразия X , $\dim X = d$. Результатом интегрирования класса α по многообразию X называется элемент

$$\int_X \alpha \stackrel{\text{def}}{=} p_*(\alpha) \in H_T^{k-d}(\text{pt}) = H^{k-d}(BT),$$

где $p: X \rightarrow \text{pt}$.

Таким образом, интегрирование эквивариантного класса дает не просто число, а многочлен. В частности, результат интегрирования может быть нетривиальным даже при $k > d$.

9 Лекция 9. Формула интегрирования и аналитическая интерпретация

Вторая теорема о локализации Пусть X : гладкое многообразие с гладким действием тора T . Множество неподвижных точек F является гладким подмногообразием.

Теорема 9.1. Пусть $i: F \rightarrow X$: вложение подмногообразия неподвижных точек. Тогда локализованный гомоморфизм прямого образа

$$S^{-1}i_*: S^{-1}H_T^*(F) \rightarrow S^{-1}H_T^{*+m-n}(X)$$

является изоморфизмом для некоторого мультипликативного множества S (в частности, это верно для $S = S_{\max}$).

Доказательство. Идея доказательства аналогична первой теореме о локализации. Далее мы будем работать с конструкциями Бореля, как если бы они были многообразиями (понимая под этим работу с аппроксимирующими конструкциями Бореля

и последующий переход к пределу). Для удобства, введем $\Delta = \dim X - \dim F$: дефект размерностей. Согласно общим свойствам гомоморфизма прямого образа, имеем диаграмму

$$H_T^*(F) \xrightarrow{\cong} H^{**+\Delta}(X, X \setminus F) \xrightarrow{j^*} H^{**+\Delta}(X)$$

$$\xrightarrow{i_*} H^{**+\Delta}(X)$$

Для доказательства теоремы достаточно показать, что $S^{-1}j^*$ является изоморфизмом для некоторого S . Заметим, что гомоморфизмы j^* являются частью точной последовательности эквивариантных когомологий пары $(X, X \setminus F)$:

$$\dots \rightarrow H_T^{**+\Delta-1}(X \setminus F) \rightarrow H_T^{**+\Delta}(X, X \setminus F) \rightarrow H_T^{**+\Delta}(X) \rightarrow H_T^{**+\Delta}(X \setminus F) \rightarrow \dots$$

Значит, нужно показать, что $S^{-1}H_T^*(X \setminus F) = 0$. Это опять же следует из спектральной последовательности Лере:

$$H^*((X \setminus F)/T; S^{-1}\mathcal{H}_T^*) \Rightarrow S^{-1}H_T^*(X \setminus F),$$

поскольку для всех $[x] \in (X \setminus F)/T$, выполнено $(S^{-1}\mathcal{H}_T^*)_{[x]} = S^{-1}H_T^*(Tx) = 0$. \square

Формула интегрирования

Упражнение 9.2. Пусть $X : T$ -многообразие, и $\alpha \in H_T^*(X)$ элемент кручения (т.е. $\exists p \in \mathbb{R}[n] : p\alpha = 0$). Тогда $\int_X \alpha = 0$.

Теорема 9.3 (Формула интегрирования, формула локализации Атьи–Ботта). *Пусть $T \curvearrowright X$ гладкое действие. Пусть множество F неподвижных точек имеет связные компоненты F_1, \dots, F_k , $i_s : F_s \hookrightarrow X$: естественные вложения, а ν_s : слой нормального расслоения к подмногообразию F_s (т.е. представление тора), $s = 1, \dots, k$. Тогда для любого эквивариантного класса $\alpha \in H_T^*(X)$ выполнено*

$$\int_X \alpha = \sum_s \int_{F_s} \frac{i_s^*(\alpha)}{e^T(\nu_s)}, \quad (9.1)$$

где равенство понимается в кольце $S^{-1}\mathbb{R}[n]$.

Доказательство. Для простоты будем считать, что $F_i = \text{pt}$. В этом случае $\nu_{F_s} = \nu_s$. Пусть $d = \dim X$. Рассмотрим последовательность гомоморфизмов:

$$H_T^*(F_s) \xrightarrow{i_{s*}} H_T^{**+d}(X) \xrightarrow{i_r^*} H_T^{**+d}(F_r)$$

Имеем

$$i_r^* i_{s*} = 0 \text{ при } r \neq s \quad (9.2)$$

(класс $i_{s*}(a)$ локализован в малой окрестности F_s , поэтому его ограничение на любую другую неподвижную точку зануляется) и

$$i_s^* i_{s*}(1) = e^T(\nu_s) \quad (9.3)$$

(см. упр.8.10). Отсюда следует, что гомоморфизм

$$i^* \sum_s \left(\frac{i_{s*}}{e^T(\nu_s)} \right) = \sum_s \frac{i_s^* i_{s*}}{e^T(\nu_s)} : S^{-1} H_T^*(F) \rightarrow S^{-1} H_T^*(F)$$

тождественный. Это достаточно проверить для базисного элемента $(0, \dots, 1, \dots, 0) \in H_T^*(F) \cong \sum_s S^{-1} \mathbb{R}[n]$, а для него это верно согласно (9.2) и (9.3). Следовательно, гомоморфизм

$$\sum_s \frac{i_{s*}}{e^T(\nu_s)} : S^{-1} H_T^*(F) \rightarrow S^{-1} H_T^*(X)$$

обратен к

$$i^* : S^{-1} H_T^*(X) \rightarrow S^{-1} H_T^*(F).$$

(тут мы, конечно, пользуемся тем, что i^* обратимый по теореме о локализации). Значит гомоморфизм

$$\sum_s \frac{i_{s*} i_s^*}{e^T(\nu_s)} : S^{-1} H_T^*(X) \rightarrow S^{-1} H_T^*(X)$$

(композиция в обратном порядке) также является тождественным. Приписав слева гомоморфизм прямого образа в точку $p_* : H_T^*(X) \rightarrow H_T^{*-d}(\text{pt})$ (вернее его локализацию), получим:

$$\sum_s \frac{p_* i_{s*} i_s^*}{e^T(\nu_s)} = p_* : S^{-1} H_T^*(X) \rightarrow S^{-1} H_T^{*-d}(\text{pt}).$$

Согласно функториальности гомоморфизма прямого образа, получаем $p_* i_{s*} = (p i_s)_*$. В итоге:

$$\int_X \alpha = p_*(\alpha) = \sum_s \frac{p_* i_{s*} i_s^*(\alpha)}{e^T(\nu_s)} = \sum_s \frac{1}{e^T(\nu_s)} \int_{X_s} i_s^*(\alpha),$$

что и требовалось¹⁶. □

Аналитическая интерпретация Комплекс де Рама (7.1) является аналитической моделью для обычных когомологий многообразий: интеграл от класса когомологий по многообразию равен интегралу от формы, классом которой он является (интеграл в смысле матана). Существует похожая аналитическая интерпретация для эквивариантных когомологий и эквивариантного интегрирования.

Пусть $S\mathfrak{t}^*$: симметрическая алгебра от двойственной алгебры Ли тора T^k . Если зафиксировать базис e_1, \dots, e_k в \mathfrak{t} , можно отождествить $S\mathfrak{t}^*$ с алгеброй многочленов $\mathbb{R}[u_1, \dots, u_k]$, где $\{u_j\} \subset \mathfrak{t}^*$ двойственный базис к $\{e_j\}$. Положим $\deg u_j = 2$.

¹⁶если F_s не точки, то доказательство аналогичное, но в нем используется дополнительный алгебраический трюк: надо локализовывать не только по многочленам, но и по некоторому мультипликативному подмножеству в $H_T^*(F)$. См. Атью–Ботта [4]

Пусть T^k гладко действует на $M = M^m$. Пусть $\Omega^*(M)^T \subset \Omega^*(M)$: подкомплекс дифференциальных форм, инвариантных относительно действия тора. Рассмотрим алгебру форм Картана

$$\Omega_T^*(M) \stackrel{\text{def}}{=} \Omega^*(M)^T \otimes St^* \cong \Omega^*(M)^T[u_1, \dots, u_k],$$

градуировка в которой определена естественным образом как сумма степени формы и степени многочлена. Формы Картана можно понимать двояко: как инвариантные дифференциальные формы с коэффициентами в алгебре многочленов, либо как многочлены с коэффициентами в инвариантных дифференциальных формах. Алгебра Картана является модулем над $St^* \cong \mathbb{R}[u_1, \dots, u_k]$. Зададим дифференциал Картана

$$d_T: \Omega_T^*(M) \rightarrow \Omega_T^{*+1}(M), \quad d_T(a \otimes P(u)) = (da) \otimes P(u) + \sum_{j=1}^k i_{\xi_j} a \otimes u_j P(u)$$

где ξ_j : поле инфинитезимальных сдвигов на M , порожденное базисным вектором $e_j \in \mathfrak{t}$, а $i_{\xi_j} a$: свертка формы a с полем ξ_j (см.(7.2)).

Упражнение 9.4. 1. Доказать, что определение дифференциала Картана не зависит от выбора базиса $\{e_j\}$ в \mathfrak{t} .

2. Доказать, что d_T уважает St^* -модульную структуру.

3. Доказать, что $d_T^2 = 0$ (использовать формулу Картана).

Теорема 9.5. Пусть M : компактное многообразие. Тогда

1. $H^*(\Omega_T^*(M), d_T) \cong H_T^*(M; \mathbb{R})$.

2. Если $\alpha \in H_T^*(M; \mathbb{R})$: класс формы Картана $a \otimes P(u)$, $a \in \Omega^*(M)^T$, $P(u) \in St^*$, то

$$\int_M \alpha = \int_M a \otimes P(u).$$

3. Гомоморфизм

$$\Omega_T^*(M) \cong \Omega^*(M)^T \otimes St^* \rightarrow \Omega^*(M)^T, \quad u_i \mapsto 0$$

индуцирует стандартный гомоморфизм $H_T^*(M; \mathbb{R}) \rightarrow H^*(M; \mathbb{R})$ (т.е. гомоморфизм, индуцированный вложением слоя в расслоении Серра $M_T \xrightarrow{M} BT$).

Замечание 9.6. Заметим, что пространство инвариантных форм де Рама лежит в пространстве форм Картана (случай, когда добавочный многочлен состоит только из свободного члена). Однако дифференциалы де Рама и Картана действуют по разному. Поэтому a может быть замкнутой формой по де Раму, но не замкнутой по Картану.

Замечание 9.7. Вообще это содержательный вопрос: как, имея замкнутую форму де Рама $a \in \Omega^s(M)^T$, $da = 0$, “поднять” ее до замкнутой формы Картана

$$\tilde{a} = a + \sum_{j \in [k]} a_j u_j + \sum_{j_1, j_2 \in [k]} a_{j_1 j_2} u_{j_1} u_{j_2} + \cdots \in \Omega_T^*(M), \quad d_T \tilde{a} = 0?$$

Здесь $a_j \in \Omega^{s-2}(M)^T$, $a_{j_1 j_2} \in \Omega^{s-4}(M)^T$ и т.д. На когомологическом уровне эта задача означает: лежит ли класс $\alpha = [a] \in H^*(M)$ в образе стандартного гомоморфизма $H_T^*(M) \rightarrow H^*(M)$? Это может быть верно, а может и не быть.

Упражнение 9.8. Докажите, что любую замкнутую форму де Рама можно поднять до замкнутой формы Картана тогда и только тогда, когда M эквивариантно формально.

Иногда бывает полезно и возможно явно описать поднятие формы. Именно это происходит в гамильтоновом случае.

Предложение 9.9. Пусть $T = T^k$ гамильтоново действует на $M = M^{2n}$ с отображением моментов $\mu: M \rightarrow \mathfrak{t}^*$. Тогда симплектическая форма $\omega \in \Omega^2(M)$ допускает эквивариантное замкнутое поднятие

$$\tilde{\omega} = \omega - \mu \in \Omega_T^2(M) \cong \Omega^2(M)^T \oplus \Omega^0(M)^T \otimes \mathfrak{t}^*, \quad d_T \tilde{\omega} = 0.$$

Доказательство. Упражнение на игру с определениями. □

Замечание 9.10. Понятие гамильтонова действия можно было бы определить когомологически: это такое действие, для которого симплектическая форма допускает поднятие до замкнутой формы Картана. А отображение моментов — это попросту добавочный член в таком поднятии.

10 Лекция 10. Profit!!!

Для разминки посчитаем симплектический объем произвольного компактного многообразия с гамильтоновым действием.

Предложение 10.1. Пусть $T^k \curvearrowright M$: гамильтоново действие с отображением моментов $\mu: M \rightarrow \mathfrak{t}^*$. Пусть F : множество изолированных (для простоты) неподвижных точек и для $p \in F$ $\alpha_{p,1}, \dots, \alpha_{p,n} \in \text{Hom}(T^k, S^1) \subset \mathfrak{t}^*$: веса касательного представления в точке p . Тогда

$$\text{Vol}_{\text{symp}}(M) = \int_M \omega^n = \sum_{p \in F} \frac{(-\mu(p))^n}{\alpha_{p,1} \cdots \alpha_{p,n}}.$$

Доказательство. Заметим, что интеграл от обычной формы равен интегралу от ее эквивариантного поднятия

$$\int_M \omega^n = \int_M \tilde{\omega}^n$$

поскольку все подкручивающие формы в $\tilde{\omega}$ имеют степень меньше $2n$. Чтобы посчитать последний интеграл, воспользуемся формулой интегрирования (9.1):

$$\int_M \tilde{\omega}^n = \sum_{p \in F} \frac{1}{e_T(\nu_p)} \int_p \tilde{\omega}.$$

Заметим, что $\int_p \tilde{\omega} = (-\mu(p))^n$, поскольку выражению $(\omega - \mu)^n$ только при члене $(-\mu)^n$ стоит форма де Рама нулевой степени, а значит только этот член вносит вклад в выражение, когда интегрируем по точке. Осталось заметить, что $e_T(\nu_p) = a_{p,1} \cdots a_{p,n}$ согласно упражнению 8.9. \square

Пример 10.2. Найдем симплектический объем многообразия $\mathbb{C}P^2$, многогранником моментов которого является $\text{conv}((3, 1), (3, 2), (2, 2))$ (допустим, зафиксированы координаты u_1, u_2 в \mathfrak{t}^*). Пусть $p_1, p_2, p_3 \in \mathbb{C}P^2$: неподвижные точки действия, которые отображаются соответственно в $(3, 1), (3, 2), (2, 2)$. Имеем $\mu(p_1) = 3u_1 + u_2$, $\mu(p_2) = 3u_1 + 2u_2$, $\mu(p_3) = 2u_1 + 2u_2$. Далее, согласно упражнению 6.3, веса касательного представления в точке p_i совпадают с примитивными направлениями вдоль ребер многогранника. Например, в точке p_1 веса (вернее, соответствующие элементы \mathfrak{t}^*) имеют вид $a_{11} = u_2$, $a_{12} = -u_1 + u_2$. В итоге

$$\int_{\mathbb{C}P^2} \omega^2 = \frac{(3u_1 + u_2)^2}{u_2(-u_1 + u_2)} + \frac{(3u_1 + 2u_2)^2}{(-u_2)(-u_1)} + \frac{(2u_1 + 2u_2)^2}{u_1(u_1 - u_2)} = 1$$

(в это трудно поверить, но... проверьте! На самом деле, тот факт, что какие-то жуткие рациональные функции при суммировании схлопываются в число — это особая магия, окружающая формулу эквивариантной локализации).

Обычно симплектический объем нормируют на $1/n!$ т.е. полагают $\text{Vol}_{\text{symp}}(M) = \frac{1}{n!} \int_M \omega^n$. При таком нормировании для любого симплектического торического многообразия M_P с многогранником Дельзана P получаем в точности:

$$\text{Vol}_{\text{symp}}(M_P) = \text{Vol}(P) \tag{10.1}$$

В примере мы это проверили для треугольника и $\mathbb{C}P^2$. В-общем, формула следует из Теоремы 7.27 (теоремы Дэйстермата–Хекмана для максимальных действий), которую мы вскоре докажем.

Упражнение 10.3. Рассмотрите ваш любимый многогранник Дельзана, и посчитайте симплектический объем соответствующего ему торического многообразия по формуле локализации.

Упражнение 10.4. Рассмотрим симплектическую форму на $G_{4,2}$, для которой многогранником моментов является октаэдр

$$\text{conv}((1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 1))$$

Вычислите симплектический объем такого грассманиана.

Докажем Теорему (7.27).

Доказательство. Чтобы доказать, что мера $\mu_* \text{Vol}_{\text{symp}}$ на \mathfrak{t}^* совпадает с равномерной мерой \mathbb{P}_P на многограннике Дельзана P , достаточно доказать, что их распределения моментов¹⁷ совпадают. Пусть $A(t) = \int_{\mathfrak{t}^*} e^{-\langle t, x \rangle} d\mu_* \text{Vol}_{\text{symp}}$ и $B(t) = \int_P e^{-\langle t, x \rangle} d\text{Vol}_{\text{eucl}}$.

Лемма 10.5. $A = \sum_{p \in F} \frac{e^{-\mu(p)}}{a_{p,1} \cdots a_{p,n}} \in \widehat{S\mathfrak{t}^*}$.

Доказательство. Подойдем к этой задаче с неожиданного конца. Пусть $\tilde{\omega} = \omega - \mu \in \Omega_T^2(M)$: эквивариантное поднятие симплектической формы. Рассмотрим такой объект

$$e^{\tilde{\omega}} \in \widehat{\Omega_T^*(M)} \cong \Omega^*(M)^T[[u_1, \dots, u_k]].$$

(экспонента вычисляется как обычно: $e^{\tilde{\omega}} = 1 + \tilde{\omega} + \frac{\tilde{\omega}^2}{2!} + \dots$). Интегрирование форм Картана по многообразию можно продолжить до пополненных колец:

$$\int_M : \Omega^*(M)^T[[u_1, \dots, u_k]] \rightarrow \mathbb{R}[[u_1, \dots, u_k]]$$

Формула интегрирования (9.1) тоже продолжается на пополненные кольца. В частности, имеет смысл и верна следующая выкладка:

$$\int_M e^{\tilde{\omega}} = \sum_{p \in F} \frac{e^{\tilde{\omega}|_p}}{a_{p,1} \cdots a_{p,n}}.$$

Заметим, что $e^{\tilde{\omega}} = e^{\omega} e^{-\mu}$ (ряд по ω обрывается по размерностным соображениям). Раскладывая это выражение в сумму по степеням дифференциальных форм, получаем

$$e^{\tilde{\omega}} = e^{-\mu} + \dots + \frac{\omega^n}{n!} e^{-\mu}.$$

Имеем,

$$\sum_{p \in F} \frac{e^{\tilde{\omega}|_p}}{a_{p,1} \cdots a_{p,n}} = \sum_{p \in F} \frac{e^{-\mu(p)}}{a_{p,1} \cdots a_{p,n}}. \quad (10.2)$$

Каждое из суммируемых выражений в этой формуле является элементом локализованного кольца рядов $S^{-1}\mathbb{R}[[u_1, \dots, u_n]]$. Однако в сумме получается элемент из $\mathbb{R}[[u_1, \dots, u_n]]$, т.е. аналитическая функция на \mathfrak{t} (напомним, что каждый элемент $u_i \in \mathfrak{t}^*$ можно понимать как линейную функцию на \mathfrak{t}).

С другой стороны, делая “замену переменной” $x = \mu(y)$ в интеграле, получаем

$$\int_M e^{\tilde{\omega}} = \int_M \frac{\omega^n}{n!} e^{-\mu} = \int_{\mathfrak{t}^*} e^{-x} d(\mu_* \text{Vol}_{\text{symp}}) = A(t)$$

В итоге $A(t) = \sum_{p \in F} \frac{e^{-\mu(p)}}{a_{p,1} \cdots a_{p,n}}$. □

¹⁷Напомним, что распределением моментов меры Ψ на V называется функция $\widehat{\Psi}(x) = \int e^{-\langle x, t \rangle} d\Psi$. То есть это почти то же, что и преобразование Фурье, только без надоедливых $\sqrt{-1}$, π и прочих констант, мешающихся при вычислениях. Чтобы термин “момент” не мозолил глаза своей таинственной связью с отображением моментов, я иногда буду называть распределение моментов преобразованием Фурье, хотя это и не вполне корректно.

Теперь посчитаем преобразование Фурье от многогранника. Это уже задача матана и выпуклой геометрии. Введем обозначения: пусть $V \cong \mathbb{R}^n$: векторное пространство, а \mathbb{I}_A обозначает индикаторную функцию множества $A \subset V$:

$$\mathbb{I}_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in A; \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Для функции Φ на V пусть $\hat{\Phi}$ обозначает ее преобразование Фурье (распределение моментов).

Лемма 10.6. Пусть P : простой многогранник в $V \cong \mathbb{R}^n$ и $\mathbb{I}_P : V \rightarrow \mathbb{R}$: его индикаторная функция. Пусть $\text{Vert}(P)$: множество вершин P , и для каждой вершины $x \in \text{Vert}(P)$, $v_{x,1}, \dots, v_{x,n} \in V$: направления вдоль выходящих из вершины x ребер, нормированные так, чтобы их определитель был равен ± 1 (каждую вершину $x \in V$, и каждое из направлений $v_{x,i}$ можно понимать как линейную функцию на V^*). Тогда вне подмножества $\bigcup_{x,i} \text{Ann}(v_{x,i}) \subset V^*$ выполнено тождество

$$\hat{\mathbb{I}}_P = \sum_{x \in \text{Vert}(P)} \frac{e^{-x}}{v_{x,1} \cdots v_{x,n}} \quad (10.3)$$

Доказательство. Представим индикаторную функцию простого многогранника в виде суммы индикаторных функций конусов, выходящих из его вершин, а затем подсчитаем преобразование Фурье для каждого из конусов (см.рис.11).

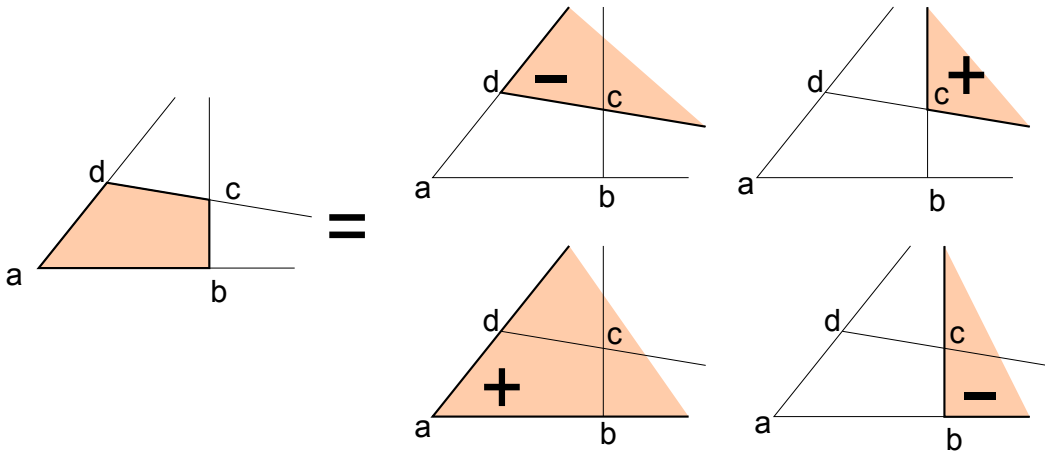


Рис. 11: Разложение многогранника в сумму конусов

Пусть $v \in V$ вектор общего положения, а именно вектор, не параллельный никакой гиперплоскости многогранника P (такой вектор называется поляризующим). Для каждой вершины $x \in \text{Vert}(P)$ запишем v в базисе $v_{x,1}, \dots, v_{x,n}$:

$$v = \alpha_{x,1}v_{x,1} + \cdots + \alpha_{x,n}v_{x,n}$$

Пусть $\epsilon_{x,i} = \text{sgn}(\alpha_{x,i}) \in \{\pm 1\}$ (нуля не может быть из-за общности положения v). Положим $\epsilon_x = \prod_{i=1}^n \epsilon_{x,i}$. Рассмотрим аффинный конус C_x с вершиной в точке x и порождающими векторами

$$\epsilon_{x,1}v_{x,1}, \dots, \epsilon_{x,n}v_{x,n}$$

(этот конус, конечно, зависит от выбора v). Тогда:

Упражнение 10.7. Докажите, что

$$\mathbb{I}_P = \sum_{x \in \text{Vert}(P)} \epsilon_x \mathbb{I}_{C_x} \quad (10.4)$$

вне объединения аффинных оболочек гиперграней многогранника.

Вычислим теперь распределение моментов для симплицального конуса.

Лемма 10.8. Пусть C : симплицальный конус в $V \cong \mathbb{R}^n$ с вершиной x и порождающими векторами $v_1, \dots, v_n \in V$, определитель которых равен ± 1 . Тогда

$$\widehat{\mathbb{I}}_C = \frac{e^{-x}}{v_1 \cdots v_n}$$

вне подмножества $\bigcup_{i=1}^n \text{Ann}(v_i)$.

Доказательство. Согласно формуле запаздывания, можно считать, что $x = 0$ (аффинный сдвиг аргумента на a добавляет в преобразование Фурье множитель e^{-a}). Делая линейную замену координат с определителем 1, можно считать, что v_1, \dots, v_n : векторы стандартного базиса. В этом случае

$$\mathbb{I}_C = \mathbb{I}_{\{x_1 \geq 0\}} \cdots \mathbb{I}_{\{x_n \geq 0\}}.$$

Применяя преобразование Фурье (распределение моментов) к каждой “ступеньке Хевисайда” $\mathbb{I}_{\{x_i \geq 0\}}$ по отдельности, получаем нужный ответ.¹⁸ \square

Подставляя результат леммы 10.8 в (10.4), получаем

$$\widehat{\mathbb{I}}_P = \sum_{x \in \text{Vert}(P)} \epsilon_x \frac{e^{-x}}{\prod_i (\epsilon_{x,i} v_{x,i})} = \sum_{x \in \text{Vert}(P)} \frac{e^{-x}}{\prod_i v_{x,i}},$$

что и требовалось. \square

Из лемм 10.5 и 10.6 следует теорема Дёйстермата–Хекмана для симплектических торических многообразий — Теорема 7.27. \square

¹⁸Это некий стандартный факт: для ступеньки $\mathbb{I}_{\{a \geq 0\}}$ от одной переменной имеем $\widehat{\mathbb{I}}_{a \geq 0} = 1/a$ с точностью до дельта-функции в нуле. Все вычисления, конечно, должны производиться в правильном пространстве обобщенных функций — в эти дебри мы влезать не будем. Важно, однако, что при суммировании конусов все дельта-функции сократятся: многогранник компактен, поэтому преобразование Фурье от него является обычной (не обобщенной) функцией.

Замечание 10.9. В лемме 10.5 нигде не используется, что действие максимально. Действительно, абсолютно аналогично доказывается, что

$$\widehat{\text{DH}}_M = \sum_{p \in F} \frac{e^{-\mu(p)}}{\prod_{i=1}^n a_{p,i}} \quad (10.5)$$

для произвольного гамильтонова действия T^k на M^{2n} с изолированными неподвижными точками. Утверждается, что, если преобразование Фурье от меры имеет вид (10.5), то мера кусочно-полиномиальна. Отсюда следует общая теорема Дейстермата–Хекмана 7.26.

Понять это можно так: каждое слагаемое в (10.5), т.е. выражение вида

$$\frac{e^{-x}}{\alpha_1 \cdots \alpha_m}$$

является преобразованием Фурье от свертки m различных ступенек Хевисайда $\mathbb{I}_{\{\alpha_i \geq 0\}}$ (благодаря тому, что преобразование Фурье перегоняет свертку в произведение и наоборот). Можно поверить, что свертка m ступенек Хевисайда в n -мерном пространстве является кусочно-полиномиальной функцией степени $m - n$ (с точностью до дельта-функций, сосредоточенных на гиперплоскостях $\alpha_i = 0$).

Дополнение: формула Лоуренса для объема многогранника Происходящее в предыдущем параграфе мотивирует (а в дельзановом случае даже и доказывает) следующий результат

Теорема 10.10 (Формула Лоуренса [20]). Пусть P : простой многогранник в евклидовом пространстве $V \cong \mathbb{R}^n$. Пусть для каждой вершины $x \in \text{Vert}(P)$ $\alpha_{x,1}, \dots, \alpha_{x,n}$ — векторы идущие из x вдоль смежных с x ребер многогранника, имеющие определитель ± 1 . Тогда

$$\text{Vol}(P) = \frac{1}{n!} \sum_{x \in \text{Vert}(P)} \frac{x^n}{\alpha_{x,1} \cdots \alpha_{x,n}}$$

(каждое слагаемое справа является рациональной функцией степени 0, однако в сумме получается число).

Заметим, что вычисление объема симплицеального многогранника — задача нехитрая, если известны координаты вершин, и информация, какие из вершин образуют грань: просто берем произвольную точку s внутри многогранника и суммируем объемы симплексов, с основаниями в гипергранях многогранника и вершинами в s (школьная формула). Формула Лоуренса в некотором смысле двойственна к школьной формуле: во-первых, она позволяет считать объем простого многогранника, а не симплицеального, а во-вторых, использует информацию о ребрах, а не о гипергранях.

Упражнение 10.11. Доказать формулу Лоуренса. Заметим, что $\text{Vol}(P) = \widehat{\mathbb{I}}_P(0)$, поэтому фактически задача следует из леммы 10.6. Однако, если в формулу (10.3) по-глупому подставить 0, то она не имеет смысла. Поймите, как эту проблему обойти с помощью абстрактной алгебры.

Упражнение 10.12. Докажите, что в условиях Теоремы 10.10 центр масс однородного многогранника P (матожидание случайной величины \mathcal{X}_P с плотностью распределения $\frac{1}{\text{Vol}(P)}\mathbb{I}_P$) вычисляется по формуле

$$\mathbb{E}(\mathcal{X}_P) = \frac{(-1)^n}{(n+1)! \text{Vol}(P)} \sum_{x \in \text{Vert}(P)} \frac{x^{n+1}}{\alpha_{x,1} \cdots \alpha_{x,n}} \in V.$$

Упражнение 10.13. Придумайте формулу типа Лоуренса для тензора инерции однородного простого многогранника P (ковариационной матрицы случайной величины \mathcal{X}_P).

Упражнение 10.14. Придумайте формулу типа Лоуренса для интеграла произвольного многочлена по простому многограннику P . (Как ни странно, подобные формулы — изобретение лишь 2012 года, несмотря на их очевидную пользу для народного хозяйства [10].)

Дополнение: метод стационарной фазы В связи с теорией Дёйстермата–Хекмана и формулой интегрирования нужно упомянуть метод стационарной фазы в физике, к которому эти темы имеют непосредственное отношение (более того, в оригинальном доказательстве Дёйстермата–Хекмана метод стационарной фазы напрямую используется).

Пусть M — многообразие размерности n (скажем, риманово или симплектическое), и пусть каждая точка многообразия испускает излучение с амплитудой f и частотой h , гладко зависящими от точки. Можно считать, что каждая точка испускает волну $f(x)e^{-\sqrt{-1}h(x)}$. Тогда, нестрого говоря, в точке, равноудаленной от всех точек M , мы будем наблюдать излучение интенсивности

$$\int_M f(x)e^{\sqrt{-1}h(x)} dx \quad (10.6)$$

(считаем, что либо M компактно, либо f имеет компактный носитель). В 19-м веке было замечено, лордом Кельвином экспериментально и Пуанкаре (Стоксом?) математически, что при большой частоте волн синусоиды, испускаемые точками $x \in M$, такими что $\text{grad } h(x) \neq 0$, друг друга нейтрализуют. Чуть более формально: пусть $k \in \mathbb{R}$: параметр и $U \subset M$: такое подмножество, что $dh(x) \neq 0$ для всех $x \in U$. Тогда

$$k^{n/2} \int_U f(x)e^{\sqrt{-1}kh(x)} dx \rightarrow 0 \quad k \rightarrow \infty$$

То есть при большой частоте весь интеграл (10.6) фактически локализуется в особых точках функции h .

Допустим теперь, что h : функция Морса. В этом случае особые точки изолированы, и значения интеграла (10.6) в особых точках можно явно выразить через гессианы (вывод и комментарии см. в [14, Ch.1]):

$$\int_M f(x)e^{\sqrt{-1}kh(x)} dx = \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{n/2} \sum_{x \in M, dh(x)=0} e^{\pi\sqrt{-1}\sigma(H)/4} \frac{f(x)e^{\sqrt{-1}kh(x)}}{\sqrt{\det H(x)}} + O(k^{-n/2-1}),$$

где $H(x)$: гессиан функции h в точке x , $\sigma(H)$ — его сигнатура (число плюсов минус число минусов в канонической форме). Таким образом, метод стационарной фазы утверждает примерное равенство

$$\int_M f(x)e^{\sqrt{-1}kh(x)} dx \approx \left(\frac{2\pi}{k}\right)^{n/2} \sum_{x \in M, dh(x)=0} e^{\pi\sqrt{-1}\sigma(H)/4} \frac{f(x)e^{\sqrt{-1}kh(x)}}{\sqrt{\det H(x)}}. \quad (10.7)$$

Сходство с формулой интегрирования налицо.

Предложение 10.15. Пусть M^{2m} : компактное симплектическое многообразие, снабженное гамильтоновым действием окружности с изолированными неподвижными точками и гамильтонианом $H: M \rightarrow \mathbb{R}$. Тогда в формуле (10.7) при $h = H$ и $f = 1$ равенство точное.

Доказательство. Идея: применить формулу интегрирования к форме $e^{\sqrt{-1}k\bar{\omega}}$ и заметить, что неподвижные точки действия — это в точности стационарные точки гамильтониана, а нормальный класс Эйлера совпадает с корнем из гессиана с точностью до всяких констант. \square

Замечание 10.16. Заметим напоследок, что далеко не каждая функция на симплектическом многообразии является гамильтонианом действия окружности. Имея произвольную функцию $h: M \rightarrow \mathbb{R}$, можно рассмотреть ее косой градиент (векторное поле, получающееся из ковекторного поля dh опусканием индексов посредством ω), однако во-первых, траектории такого поля могут не замкнуться, а во-вторых, даже если они замкнулись, время путешествия по разным траекториям может быть различным, а значит это не есть действие одной окружности.

Дополнение: формула локализации в зеркальной науке Формула интегрирования позволяет сводить сложные интегралы к конечным суммам. С другой стороны, часто задачи перечислительной геометрии сводятся к вычислению интегралов от хар.классов каких-нибудь расслоений. Концевич [19] использовал формулу локализации для получения (в частности) следующего результата.

Теорема 10.17. Пусть $Q \subset \mathbb{C}P^4$: квинтика общего положения (трехмерная поверхность степени 5). Тогда число комплексных кривых степени 4 на Q равно

$$N_4 = \frac{15517926796875}{64}$$

(число нецелое, поскольку у кривых есть симметрии, и каждая кривая считается с весом обратным порядку симметрии).

Изначальная мотивация для подобных вычислений состояла в проверке гипотезы зеркальной симметрии для определенных многообразий. Гипотеза предсказывала именно такое значение для числа N_4 .

Дополнение: интеграл Хариш–Чандры–Иццисона–Зюбера

Упражнение 10.18. Пусть $A = \text{diag}(a_i)$, $B = \text{diag}(b_i)$ — диагональные эрмитовы матрицы размера $n \times n$, $a_i \neq a_j$, $b_i \neq b_j$ при $i \neq j$. Рассмотрим интеграл HCIZ:

$$\int_{U(n)} e^{-\text{tr}(AUBU^{-1})} dU,$$

где U пробегает по всем унитарным матрицам, а интеграл берется по инвариантной мере Хаара на $U(n)$, для которой $\text{Vol } U(n) = 1$. Доказать, что интеграл HCIZ равен

$$\text{const} \frac{\det(e^{-a_i b_j})}{\prod_{i < j} (a_i - a_j) \prod_{i < j} (b_i - b_j)}.$$

(const = $\prod_{i=1}^{n-1} i!$, но это не важно). Подсказки:

1. Идея: диагональные матрицы коммутируют с B , поэтому интеграл сводится к интегралу по многообразию полных флагов $U(n)/T^n$, которое кэлерово, а значит инвариантная мера на нем совпадает с симплектической мерой. По нему интеграл считается с помощью формулы локализации. Более подробно:
2. Рассмотрим многообразие $M_B = \{UBU^{-1} \mid U \in U(n)\}$ (если домножить эрмитову матрицу на $\sqrt{-1}$, то получится косоэрмитова матрица, в этом смысле $\sqrt{-1}M_B$ есть просто общая орбита присоединенного действия группы $U(n)$ на своей касательной алгебре). Заметим, что на M_B действует тор $T^n \subset U(n)$ посредством сопряжения (у этого действия есть ядро неэффективности, состоящее из постоянных матриц, но это не страшно). Докажите, что неподвижными точками являются диагональные матрицы, полученные из B перестановкой диагональных значений.
3. Докажите, что на M_B можно ввести симплектическую форму¹⁹, относительно которой действие тора гамильтоново, причем в качестве отображения моментов можно взять проекцию на диагональные матрицы:

$$\mu: (C = (c_{ij}) \in M_B) \mapsto (c_{11}, \dots, c_{nn}) \in \mathbb{R}^n$$

4. Хотя это и не важно для вычисления интеграла HCIZ, заметим, что $\mu(M_B)$ по теореме Атьи–Гийемина–Стернберга есть $(n-1)$ -мерный пермутоэдр

$$\text{conv}\{(b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(n)}) \mid \sigma \in \Sigma_n\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Получаем приятную теорему Хорна–Шура: диагональ эрмитовой (в частности, симметричной) матрицы C лежит в выпуклой оболочке точек, координаты которых — всевозможные перестановки собственных значений C .

¹⁹в высокой литературе она называется формой Кириллова или формой Костанта и вводится на орбите коприсоединенного представления, однако в нашем случае группа компактна, поэтому присоединенное представление можно отождествить с коприсоединенным посредством $U(n)$ -инвариантного скалярного произведения

5. Опишите веса касательных представлений тора в неподвижных точках действия $T^n \curvearrowright M_B$.
6. Пусть $C = UBU^{-1} \in M_B$. Тогда $\text{tr}(AUBU^{-1}) = \langle \mu(C), a \rangle$, где $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n \cong \mathfrak{t}$.
7. Пусть $d = \dim M_B/2 = n(n-1)/2$. Имеем

$$\int_{U(n)} e^{-\text{tr}(AUBU^{-1})} dU = \frac{\text{const}}{\text{Vol}_{\text{symp}}(M_B)} \int_{M_B} \frac{\omega^d}{d!} e^{\langle \mu, a \rangle}.$$

8. Вычислите $\text{Vol}_{\text{symp}}(M_B)$ и $\int_{M_B} \omega^d e^{\langle \mu, a \rangle}$ по формуле эквивариантной локализации. Подсказка для объема: полезно посмотреть на b_i как на формальные переменные и показать, что объем является многочленом степени $d = n(n-1)/2$, кососимметричным по всем переменным. Единственным таким многочленом является многочлен Вандермонда $\prod_{i < j} (b_i - b_j)$, с точностью до мультипликативной константы.

Список литературы

- [1] C.Allday, M.Franz, V.Puppe, *Equivariant Poincaré–Alexander–Lefschetz duality and the Cohen–Macaulay property*, *Algebr. Geom. Topol.* 14 (2014), 1339–1375.
- [2] M. Atiyah, *Convexity and commuting Hamiltonians*, *Bull. London Math. Soc.* 14 (1982), 1–15.
- [3] M. F. Atiyah, R. Bott, *The Yang-Mills Equations over Riemann Surfaces*, *Phil. Trans. R. Soc. Lond. A* 308 (1983), 523–615.
- [4] M.F.Atiyah, R.Bott, *The moment map and equivariant cohomology*, *Topology* Vol.23, №1 (1984), 1–28.
- [5] D.Bolker, V.W.Guillemin, T.Holm, *How is a graph like a manifold?*, arXiv.
- [6] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов, *Торические действия в топологии и комбинаторике*.
- [7] V. Buchstaber, T. Panov, *Toric Topology*, *Math. Surveys Monogr.*, 204, AMS.
- [8] M. Davis, T. Januszkiewicz, *Convex polytopes, Coxeter orbifolds and torus actions*, *Duke Math. J.*, 62:2 (1991), 417–451.
- [9] T.Delzant, *Hamiltoniens periodiques et images convexes de l’application moment*, *Bull. Soc. Math. France* 116 (1988), 315–339.

- [10] J. A. De Loera, B. Dutra, M. Köppe, S. Moreinis, G. Pintoa, J. Wu, *Software for Exact Integration of Polynomials over Polyhedra*, arXiv.
- [11] J. J. Duistermaat, G. J. Heckman, *On the Variation in the Cohomology of the Symplectic Form of the Reduced Phase Space*, Invent. math. 69, 259–268 (1982).
- [12] M. Goresky, R. Kottwitz, R. MacPherson, *Equivariant cohomology, Koszul duality, and the localization theorem*, Invent. math. 131, 25–83 (1998).
- [13] V. Guillemin, S. Sternberg, *Convexity properties of the moment mapping*, Invent. Math. 67 (1982), 491–513.
- [14] V. Guillemin, S. Sternberg, *Geometric asymptotics*, Math. surveys and monographs Vol. 14.
- [15] V. Guillemin, C. Zara *One-skeleta, Betti number and equivariant cohomology*, Duke Math. J. 107 (2001), 283–349.
- [16] A. Hattori, M. Masuda, *Theory of multi-fans*, Osaka J. Math. 40 (2003), 1–68.
- [17] Michael Hutchings, *Introduction to spectral sequences*.
- [18] F. C. Kirwan, *Cohomology of quotients in symplectic and algebraic geometry*, Mathematical Notes, Vol. 31., 1984.
- [19] M. Kontsevich, *Enumeration of rational curves via torus actions*, arXiv:hep-th/9405035.
- [20] J. Lawrence, *Polytope volume computation*, Math. Comp. 57 (1991), 259–271.
- [21] Дж. МакКлири, *Путеводитель по спектральным последовательностям*.
- [22] А.Т.Фоменко, Д.Б.Фукс, *Курс гомотопической топологии*.