Квантовая универсальная обёртывающая $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

Опр. *Квантовая универсальная обёртывающая алгебра $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ это по ассоциативная алгебра с единицей над полем $k, q \in k, q \neq \pm 1$, порожденная элементами E, F, K, K^{-1} со следующими определяющими соотношениями:*

$$KK^{-1} = K^{-1}K = 1; \tag{1}$$

$$KEK^{-1} = q^2 E; \tag{2}$$

$$KFK^{-1} = q^{-2} F; \tag{3}$$

$$EF - FE = \frac{K - K^{-1}}{q - q^{-1}}. \tag{4}$$

Введём обозначения

$$[K; a] = \frac{Kq^a - K^{-1}q^{-a}}{q - q^{-1}}, a \in \mathbb{Z};$$

$$[s] = \frac{q^a - q^{-a}}{q - q^{-1}},\ [s]! = [1][2]\dots[s],\ \begin{bmatrix} r \\ i \end{bmatrix} = \frac{[r]!}{[i]![n-i]!}.$$

Легко видеть, что

$$[b + c][K; a] = [b][K; a + c] + [c][K; a - b].$$

Так же, из определяющих соотношений можно вывести следующие:

$$EF^s = F^s E + [s]F^{s-1}[K; 1 - s],\ FE^r = E^r F - [r]E^{r-1}[K; 1 - r].$$

1. Определим действие U_q на $k[X, Y, Z, Z^{-1}]$ следующим образом:

$$f(Y^s Z^n X^r) = Y^{s+1} Z^n X^r;$$

$$e(Y^s Z^n X^r) = q^{-2n} Y^s Z^n X^{r+1} + [s]Y^{s-1} \frac{Zq^{1-s} - Z^{-1}q^{s-1}}{q - q^{-1}} Z^n X^r;$$

$$e(Y^s Z^n X^r) = q^{-2s} Y^s Z^{n+1} X^r.$$

Докажите, что таким образом определенные операторы удовлетворяют соотношениям (1)–(4). Выведите из этого, что мономы $F^s K^n E^r$ – линейно независимы в U_q.

Указание. *Из соотношений в алгебре легко вывести, что любой элемент представляется в виде суммы мономов такого вида. Из задачи 1 следует теорема ПБВ – эти мономы являются базисом U_q.*

2. Докажите, что в U_q

$$E^r F^s = \sum_{i=0}^{\min(r,s)} \begin{bmatrix} r \\ i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s \\ i \end{bmatrix} [i]! F^{s-i} \left(\prod_{j=1}^{i} [K; i - (r + s) + j] \right) E^{r-i}.$$

Указание. *Указание: индукция по r.*

3. Пусть M – конечномерный U_q – модуль, q – не корень из единицы и $\operatorname{char} k \neq 2$. На лекции было доказано, что существует $s > 0$, так что $F^s M = 0$. Докажите, что $F^{s-r} h_r M = 0$, где

$$h_r = \prod_{j=-(r-1)}^{r-1} [K; r - s + j]$$

для любого $0 \leqslant r \leqslant s$. По определению, $h_0 = 1$.

Указание. *Указание: индукция по r. Рассмотрите элемент $A = E^r F^s \prod_{j=1}^{r-1}[K; r-s+j]$.*

4. Заменим в определении U_q элемент $\dfrac{K-K^{-1}}{q-q^{-1}}$ на H. Рассмотрим новую алгебру U' с образующими K, K^{-1}, E, F, H с соотношениями $(1)-(4)$ и

$$[H, E] = E(qK + q^{-1}K^{-1});$$

$$[H, F] = -(qK + q^{-1}K^{-1})F;$$

$$[E, F] = H;$$

$$(q-q^{-1})H = K - K^{-1}.$$

Докажите, что $U_q' \simeq U_q$, если $q^2 \neq 1$. Постройте канонический изоморфизм $U(\mathfrak{sl}_2) \simeq U_1' \otimes_k k[\mathbb{Z}_2]$.

5. Пусть q – примитивный корень из 1, l – нечётно, $l \geqslant 3$. Найдите все простые U_q – модули, на которых элемент Казимира $C = FE + \dfrac{Kq + K^{-1}q^{-1}}{(q-q^{-1})^2}$ действует одинаковым скаляром.

6. Пусть G – группа, k – поле, $f_1, \ldots, f_n : G \to k^\times$ – различные гомоморфизмы G и мультипликативной группы поля. Докажите, что они линейно независимы.