Конечномерные представления $U_q(\mathfrak{sl}_2)$

Модуль Верма – это векторное пространство с базисом $m_0, m_1, \ldots$, где U_q действует следующим образом:

$$Km_i = \lambda q^{-2i} m_i,$$
$$Fm_i = m_{i+1},$$
$$Em_i = \begin{cases} 0, \ i = 0; \\ [i]\dfrac{\lambda q^{1-i} - \lambda^{-1} q^{i-1}}{q - q^{-1}}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

1. а) Докажите, что такой модуль действительно существует. б) Докажите универсальное свойство: для любого модуля M и вектора $m \in M$ такого, что $Em = 0$ и $Km = \lambda m$ существует единственный гомоморфизм модулей $\varphi : M(\lambda) \to M$, так что $\varphi m_0 = m$.

Предложение. *Пусть q – не корень из 1. Рассмотрим $\lambda \in k, \lambda \neq 0$. Тогда если $\lambda \neq \pm q^n$ для любого $n \geqslant 0$, то $M(\lambda)$ – простой модуль. Если $\lambda = \pm q^n$ для некоторого $n \geqslant 0$, линейная оболочка элементов m_i, $i \geqslant n+1$ – это единственный нетривиальный подмодуль в $M(\lambda)$, изоморфный $M(q^{-2(n+1)}\lambda)$.*

2. Докажите, что если q – не корень из 1, то любой простой модуль изоморфен $L(n,+)$ или $L(n,-)$, где $L(n,+)(L(n,-))$ имеет базис $m_0, \ldots, m_n$ такой, что:

$$Km_i = q^{n-2i} m_i,$$
$$Fm_i = \begin{cases} m_{i+1}, \ i < n, \\ 0, \ i = n, \end{cases}$$
$$Em_i = \begin{cases} [i][n+1-i]m_{i-1}, \ i > 0, \\ 0, \ i = 0. \end{cases}$$

$$Km_i = -q^{n-2i} m_i,$$
$$Fm_i = \begin{cases} m_{i+1}, \ i < n, \\ 0, \ i = n, \end{cases}$$
$$Em_i = \begin{cases} -[i][n+1-i]m_{i-1}, \ i > 0, \\ 0, \ i = 0. \end{cases}$$

Проверьте, что если $\operatorname{char} k \neq 2$, то $L(n,+)$ не изоморфно $L(n,-)$.

Опр. *Элементом Казимира C называют следующий центральный элемент U_q:*

$$C = FE + \frac{Kq + K^{-1}q^{-1}}{(q - q^{-1})^2}.$$

3. Убедитесь, что на модулях Верма элемент Казимира действует скаляром, и что на разных простых модулях этот скаляр разный.

С помощью элемента Казимира можно доказать, что если q – не корень из 1,то:

Теорема. *Все весовые представления U_q вполне приводимы (все, если $\operatorname{char} k \neq 2$).*

Пусть $q^l = 1$, $l > 0$ – нечётно и минимально с таким свойством. Рассмотрим U_q – модуль $Z_b(\lambda)$, с базисом $m_0, \ldots, m_{l-1}$:

$$Km_i = q^{-2i}\lambda m_i,$$
$$Fm_i = \begin{cases} m_{i+1}, \ i < l-1, \\ bm_0, \ i = l-1, \end{cases}$$
$$Em_i = \begin{cases} \dfrac{\lambda q^{1-i} - \lambda^{-1} q^{i-1}}{q - q^{-1}}, \ i > 0, \\ 0, \ i = 0. \end{cases}$$

4. Докажите, что такой модуль действительно существует.

Предложение. *Пусть $q^l = 1$ – примитивный корень из 1, $l \geqslant 3$. Если $b \neq 0$ или $\lambda^{2l} \neq 1$, то $Z_b(\lambda)$ – простой U_q - модуль. Если $b = 0$ или $\lambda = \pm q^n$, $0 \leqslant n < l-1$, тогда $Z_0(\pm q^n)$ – простой, если и только если $n = l-1$; если $n < l-1$, то линейная оболочка m_j, $j > n$ это единственный нетривиальный подмодуль $Z_0(\pm q^n)$.*

Из этого следует, что если $0 \leqslant n < l$, то для U_q в корне из единицы мы получаем представления $L(n, \pm)$ размерности $n+1$ – факторы $Z_0(\pm q^n)$ по единственному подмодулю.

5. Пусть $q^l = 1$ – примитивный корень из 1, $l \geqslant 3$. Пусть поле k – алгебраически замкнуто. Пусть M – конечномерный простой U_q модуль.

а) Докажите, что в этом случае M – весовой модуль, то есть прямая сумма собственных подпространств элемента K и элементы E^l, F^l, K^l, C действуют скаляром.

б) Пусть E^l действует нулём на M. Тогда $M \simeq Z_b(\lambda)$ или $M \simeq L(n, \pm)$.

в) Пусть F^l действует нулём, а E^l – нет. Покажите, что в этом случае $M \simeq {}^{\omega}Z_b(\lambda)$, где на M элемент $u \in U_q$ действует как $\omega(u)$. Здесь ω – автоморфизм U_q: $\omega(E) = F, \omega(F) = E, \omega(K) = K^{-1}$.

г) Пусть F^l и E^l действуют нулем. Пусть F^l действует скаляром b. У K есть некоторый собственный вектор m_0 с собственным значением λ. Пусть $m_i = F^i m_0$. Докажите, что существует $a \in k, a \neq 0$, так что $Em_0 = am_0$. Докажите, что в этом случае модуль можно задать M следующим образом:

$$Km_i = q^{-2i}\lambda m_i,$$
$$Fm_i = \begin{cases} m_{i+1}, \ i < l-1, \\ bm_0, \ i = l-1, \end{cases}$$
$$Em_i = \begin{cases} \left(ab + \dfrac{(q^i - q^{-i})(\lambda q^{1-i} - \lambda^{-1}q^{i-1})}{(q-q^{-1})^2}\right) m_{i-1}, \ i > 0, \\ am_{l-1}, \ i = 0. \end{cases}$$

Алгеброй Хопфа называется четвёрка $(A, \Delta, \varepsilon, S)$, где A – ассоциативная алгебра с единицей, $\Delta : A \to A \otimes A$ – гомоморфизм алгебр (коумножение), $\varepsilon : A \to k$ – гомоморфизм (коединица), $S : A \to A$ – антигомоморфизм (антипод), такие, что выполнены следующие свойства:

$$(\Delta \otimes \mathrm{id}) \circ \Delta = (\mathrm{id} \otimes \Delta) \circ \Delta (\text{коассоциативность}), \tag{1}$$

$$(1 \otimes \varepsilon) \circ \Delta = \mathrm{id} = (\varepsilon \otimes 1) \circ \Delta \ (\text{здесь } U \simeq U \otimes k \text{ посредством } u \to u \otimes 1), \tag{2}$$

$$m \circ (1 \otimes S) \circ \Delta = i \circ \varepsilon = m \circ (S \otimes 1) \circ \Delta. \tag{3}$$

(здесь $m : U \otimes U \to U, \ u \otimes u' \to uu'$ – умножение; $i : k \to U, \ a \to a1$ – единица).

6. а)Докажите, что антипод в алгебре Хопфа однозначно определяется условием коммутативности (3).

б) Докажите, что антипод это антигомоморфизм алгебры Хопфа, то есть $S(xy) = S(y)S(x)$ и $\Delta(S(x)) = (S \otimes S)(P \circ \Delta(x))$, где $P(a \otimes b) = b \otimes a$.

в) Докажите, что $\varepsilon \circ S = \varepsilon$, $S \circ i = i$.

г) Алгебра Хопфа называется кокоммутативной, если $\Delta = P \circ \Delta$. Докажите, что если алгебра Хопфа коммутативна или кокоммутативна, то $S^2 = id$. Верно ли обратное?

7. Пусть $\mathfrak{g}$ – алгебра Ли. Проверьте, что на $U(\mathfrak{g})$ можно задать структуру кокоммутативной алгебры Хопфа следующим образом: $\Delta(x) = x \otimes 1 + 1 \otimes x$ – гомоморфизм, $S(x) = -x$ – антигомоморфизм, $\varepsilon(x) = 0$.

8. Элемент алгебры Хопфа называется примитивным, если $\Delta(x) = 1 \otimes x + x \otimes 1$. Пусть A – кокоммутативная алгебра Хопфа, порожденная своими примитивными элементами. Докажите, что $A \simeq U(\mathfrak{g})$ для некоторой алгебры Ли $\mathfrak{g}$ (структура алгебры Хопфа на $U(\mathfrak{g})$ – стандартная).

На U_q определим структура алгебры Хопфа следующим образом:

$$\Delta(E) = E \otimes 1 + K \otimes E,$$

$$\Delta(F) = F \otimes K^{-1} + 1 \otimes F,$$

$$\Delta(K) = K \otimes K,$$

$$\varepsilon(E)=\varepsilon(F)=0, \varepsilon(K)=1,$$
$$S(E)=-K^{-1}E, S(F)=-FK, S(K)=K^{-1}.$$

9. Проверьте, что таким образом определенные отображения определяют структура алгебры Хопфа на $U_q(\mathfrak{sl}_2)$. Проверьте так же, что

$$S^2(u)=K^{-1}uK \ \forall\ u\in U_q,$$

$$\Delta(E^r)=\sum_{i=0}^{r} q^{i(r-i)}\begin{bmatrix} r\\ i\end{bmatrix} E^{r-i}K^i\otimes E^i,$$

$$\Delta(F^r)=\sum_{i=0}^{r} q^{i(r-i)}\begin{bmatrix} r\\ i\end{bmatrix} F^{i}\otimes F^{r-i}K^{-i}.$$

Пусть V и W – два U_q модуля. Посредством Δ можно определить структуру U_q модуля на $U\otimes V$:

$$u\cdot(v\otimes w)=\left(\sum_i u_iv\otimes u_i'w\right),$$

где $\Delta(u)=\sum_i u_i\otimes u_i'$. Условие (1) тогда означает, что для любых V_1,V_2,V_3 верно, что $(V_1\otimes V_2)\otimes V_3\simeq V_1\otimes(V_2\otimes V_3)$.
ε определяет тривиальное одномерное представление k, которое характеризуется следующим свойством: $V\otimes k\simeq k\simeq k\otimes V$.
С помощью S можно определить представление в пространстве V^*:

$$(u\cdot f)(v)=f(S(u)v)\ \forall\ u\in U_q, v\in V, f\in V^*.$$

Наконец, определим структуру U_q модуля на $\mathrm{Hom}_k(V,W)$:

$$(u\varphi)(v)=\sum_i u_i\varphi(S(u_i')v).$$

10. Пусть M,N есть U_q модули. Проверьте, что:
а) $M^*\otimes M\to k,\ f\otimes m\to f(m)$ – гомоморфизм U_q модулей, а $M\otimes M^*\to k,\ m\otimes f\to f(m)$ – нет. Тем не менее $M\otimes M^*\to k,\ m\otimes f\to f(K^{-1}m)$ – гомоморфизм U_q модулей.
б) Отображение $N\otimes M^*\to \mathrm{Hom}_k(M,N), n\otimes f\to(\varphi_{f,n}:m\to f(m)n)$ – гомоморфизм модулей, а $M^*\otimes N\to\mathrm{Hom}_k(M,N), f\otimes n\to(\varphi_{f,n}:m\to f(m)n)$ – нет.
в) Определим $M^U=\{m\in M\,|\,um=\varepsilon(u)m\ \forall u\in U_q\}$. Докажите, что $\mathrm{Hom}_k(M,N)^U=\mathrm{Hom}_U(M,N)$.
11. а) Пусть q – не корень из 1. Докажите, что $M\otimes N\simeq N\otimes M$. Разложите на неприводимые представления $L(n,\varepsilon_1)\otimes L(m,\varepsilon_2)$.
б) Найдите явно старшие вектора (то есть собственные для K и анулирующиеся E) соответствующих весов.

Замечание. *Если разложить эти старшие вектора по стандартному базису в тензорном произведении, то полученные коэффициенты называются квантовые коэффициенты Клебша-Гордона.*

12. Докажите, что $L(n,\varepsilon)\simeq L(n,\varepsilon)^*$.