

Конспект лекций

Талалаева Д.В.

по специальному курсу

Интегрируемые модели статистической физики и некоторые задачи маломерной топологии

Содержание

1 Лекция 1	3
1.1 Постановка задачи про инварианты узлов	3
1.2 Диаграмма зацепления и теорема Рейдемейстера	3
1.3 Группа кос	4
1.4 Трехмерные многообразия	5
1.5 Фундаментальная группа дополнения	5
1.6 Задача о 2-узлах	6
1.7 Теорема Розмана	7
1.8 Полином Джонса	7
1.9 Полином Александера	9
2 Лекция 2	10
2.1 Квандлы	10
2.2 Квандлы и инварианты 1-узлов	11
2.3 Квандлы и инварианты 2-узлов	14
3 Лекция 3	15
3.1 Алгебры Хопфа	15
3.2 Симметрии квантовой плоскости	20
3.3 Структура $U_q(\mathfrak{sl}_2)$	21
3.4 Уравнение Янга-Бакстера	22
3.5 Дубль Дринфельда	22
3.6 Янгиан	24
3.7 „Представление вычисления“	25
4 Лекция *	25
4.1 Подалгебра Бете	25
4.2 Коммутативность подалгебры Бете	26
5 Лекция 4	27
5.1 Парадигма статистической механики	27
5.2 Термодинамический предел и критические явления	28
5.3 Одномерная модель Изинга	29
5.4 Двумерная модель Изинга, 8-и вершинная модель	31

6	Лекция 5	33
6.1	Модель льда	33
6.2	Модель льда и магнетик Гейзенберга	33
6.3	Коммутативное семейство	36
6.4	Алгебраический анзац Бете	37
6.5	Уравнения Бете в термодинамическом пределе	39
7	Лекция 6	40
7.1	Инвариант ленточных графов Тураева-Решетихина	40
7.2	Квадратный корень конструкции	43
7.3	Альтернативная конструкция	44
7.4	Инвариант связок	48
7.5	Пример для $U_h(\mathfrak{sl}_2)$	50
8	Лекция 7	52
8.1	Алгебры Гекке и Темперли-Либа	52
9	Лекция 8. Уравнение тетраэдров	53
9.1	Физическая интерпретация	54
9.2	Примеры решений	54
9.3	Тетраэдральный комплекс	57
9.4	Уравнение n -симплекса.	60
9.5	Старшие косы	62
9.6	Кластерная реализация	62
10	Лекция 9	62
10.1	Статсумма для диаграммы 2-узла	62
10.2	Доказательство основной теоремы. 1-е, 5-е и 6-е движения.	64
10.3	3-е и 7-е движения	66
11	Лекция 10	68
11.1	Интегрируемость в $d = 1$	68
11.2	Доказательство коммутативности в $d = 1$	69
11.3	Регулярные 3-d решетки и статистические модели	71
11.4	Некоторые следствия уравнения тетраэдров	72
11.5	Два семейства	73
12	Лекция 11	74
12.1	Квантовые топологические теории поля	74
12.2	Квантование пространства плоских связностей	76
12.3	Теорема Бореля-Вейля-Ботта	77
12.4	Сфера с отмеченными точками	78
12.5	Теория Черна-Саймонса и топологические инварианты	78
12.6	Теория Черна-Саймонса и теория Веса-Зумино-Виттена	79
12.7	Связность Книжника-Замолодчикова	79
12.8	BF-теория	79

1 Лекция 1

1.1 Постановка задачи про инварианты узлов

Определение 1 *Гладким узлом называется образ гладкого вложения S^1 в R^3 (или S^3). Зацеплением называется объединение непересекающихся узлов. Два зацепления называются эквивалентными если имеется изотопия объемлющего пространства, переводящая одно зацепление в другое. Далее часто под зацеплением или узлом будет пониматься класс таких объектов.*

Замечание 1 *Из определения непосредственно следует, что дополнения к эквивалентным зацеплениям гомеоморфны. Обратное, вообще говоря, не верно.*

Замечание 2 *Имеют место также теория кусочно-линейных узлов и теория топологических узлов. Если первая ситуация близка к гладкой, то во второй возникают так называемые дикие узлы и мы не будем их рассматривать.*

1.2 Диаграмма зацепления и теорема Рейдемейстера

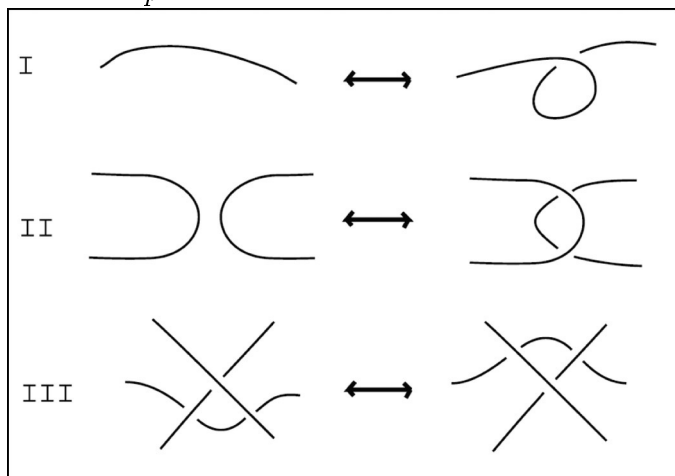
Основной источник [1].

Определение 2 *Диаграммой зацепления называется такая ортогональная проекция зацепления на плоскость в R^3 , при которой*

1. дифференциал отображения не вырождается,
2. количество прообразов каждой точки не превышает числа 2,
3. множество двойных точек конечно.



Теорема 1 (Рейдемейстер) *Две диаграммы соответствуют эквивалентным зацеплениям тогда и только тогда, когда одна может быть получена из другой конечным набором движений из списка ниже и объемлющей изотопией \mathbb{R}^2 .*



1.3 Группа кос

Определение 3 Группой кос B_n называется фундаментальная группа конфигурационного пространства n несовпадающих точек на \mathbb{C}

$$B_n \simeq \pi_1(\{\mathbb{C}^n \setminus \Delta\} / S^n).$$

Здесь Δ представляет собой множество $\{(z_1, \dots, z_n) \mid z_i = z_j \text{ для некоторых } i \neq j\}$.

Замечание 3 Можно представлять себе косу как набор гладких монотонных непрерывающихся кривых в \mathbb{R}^3 , соединяющих два набора n точек на двух горизонтальных плоскостях. Монотонной назовем кривую, высота точки которой относительно выбранного вертикального направления в \mathbb{R}^3 является монотонной функцией параметра на кривой.

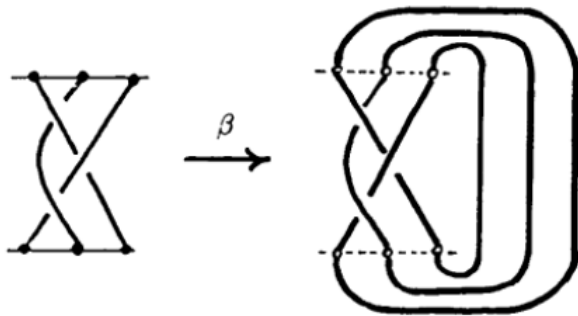
Артин предложил алгебраическое описание B_n в виде образующих $\sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}$ и соотношений

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad \text{для } 1 \leq i \leq n-2, \\ \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i \quad \text{если } |i-j| \geq 2 \end{aligned}$$

Пример 1 Группа B_3 с генераторами x, y и соотношением $xux = yxy$ изоморфна группе с двумя генераторами a, b и соотношением $a^2 = b^3$. Изоморфизм задается преобразованием $a = xux, b = xy$. В данной группе выражение $(xy)^3$ оказывается центральным. Групповую алгебру данной группы можно называть некоммутативной каспидальной кривой рода 1.

Группа кос допускает гомоморфизм в симметрическую группу S_n , в которой дополнительно к соотношениям Артина имеется соотношение $\sigma_i^2 = 1$.

Важной в контексте изучения узлов является операция замыкания косы, которая состоит в отождествлении начальных и конечных точек.



Теорема 2 (Александр) *Отображение, сопоставляющее косе ее замыкание, сюръективно.*

Для того, чтобы описать косы, дающие эквивалентные узлы, рассмотрим индуктивный предел групп кос

$$B = \lim_{n \rightarrow \infty} B_n$$

по естественному вложению $B_n \rightarrow B_{n+m}$, определяемому отображением генераторов $\sigma_i \rightarrow \sigma_i$ для $i = 1, \dots, n-1$. Данная группа обладает естественной фильтрацией $\{B_n\}$.

Определение 4 Преобразованиями Маркова называются следующие преобразования в группе B

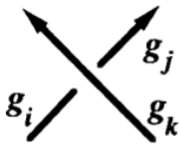
1. $b \mapsto aba^{-1}$,
2. $b \mapsto b\sigma_n$, где $b \in B_n$.

Теорема 3 (Марков) Замыкания двух кос изотопны тогда и только тогда, когда одну можно получить из другой конечным числом преобразований Маркова.

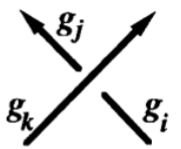
1.4 Трехмерные многообразия

1.5 Фундаментальная группа дополнения

Рассмотрим еще один важный инвариант зацепления - фундаментальную группу дополнения к рассматриваемому зацеплению. Для ее описания в терминах генераторов и соотношений необходимо выбрать ориентацию на зацеплении, каждому сегменту диаграммы сопоставить генератор, тогда соотношения для каждой двойной точки будут иметь вид (в этой форме они называются соотношениями Виртингера):

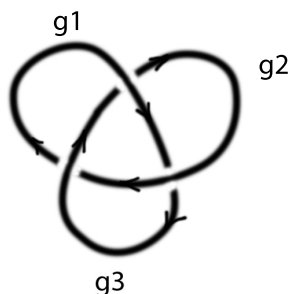


$$g_j = g_k g_i g_k^{-1}$$



$$g_j = g_k^{-1} g_i g_k$$

Пример 2 Опишем фундаментальную группу дополнения к трилистнику. Введем генераторы группы в соответствии с обозначениями на рисунке:



Получим соотношения:

$$\begin{aligned} g_3 &= g_2^{-1} g_1 g_2 \\ g_1 &= g_3^{-1} g_2 g_3 \\ g_2 &= g_1^{-1} g_3 g_1 \end{aligned}$$

Заметим, что одно из них лишнее, то есть выражается через остальные два. В частности, можно оставить два генератора g_1, g_2 и одно соотношение $g_1^{-1} g_2^{-1} g_1^{-1} g_2 g_1 g_2 = 1$. Данная группа изоморфна B_3 .

1.6 Задача о 2-узлах

Определение 5 2-узлом назовем класс изотопий вложений $S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^4$.

Пример 3 Примерами нетривиальных 2-узлов являются так называемые закрученные-повернутые узлы Зимана (*twisted-spin knots*). Они представляются следующей картинкой:

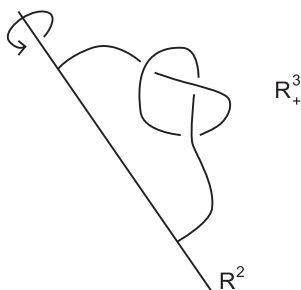


Рис. 1: 2-узел Зимана

Так же, как и в случае с 1-узлами, эффективным средством работы с этими топологическими объектами оказывается диаграмма узла, то есть такая проекция 2-узла на \mathbb{R}^3 , которая представляется особой поверхностью с ограничениями на типы особенностей. Допускаются только особенности типа двойная точка (точнее дуга двойных точек), тройная точка и точка ветвления (или точка Уитни).

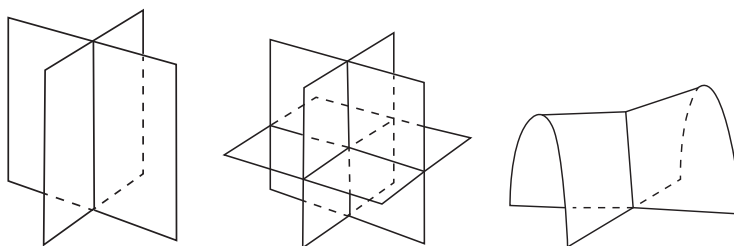


Рис. 2: Типы особых точек

Напомним, что точкой Уитни называется точка, окрестность которой приводится к виду параметризованной поверхности

$$\begin{aligned} x &= uv \\ y &= u \\ z &= v^2. \end{aligned}$$

Иными словами, это поверхность, которая локально задается уравнением:

$$x^2 = y^2 z.$$

Таким образом, диаграмма 2-узла это особая поверхность, особые точки которой организованы в граф, ребра которого представляют собой дуги двойных точек, а вершины - тройные точки и точки Уитни. При этом тройные точки имеют валентность 6, а точки Уитни - валентность 1.

1.7 Теорема Розмана

Теорема 4 (1998) *Две диаграммы отвечают эквивалентным 2-узлам тогда и только тогда, когда одна может быть получена из другой конечной последовательностью движений из перечня ниже и объемлющей изотопией диаграммы в \mathbb{R}^3 .*

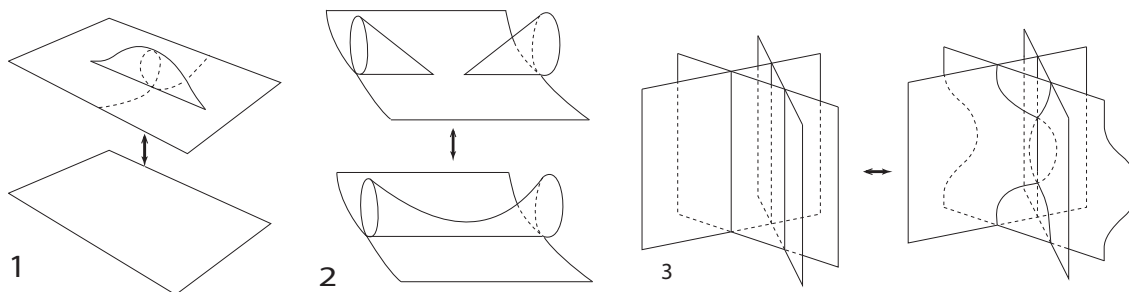


Рис. 3: Движения 1-3

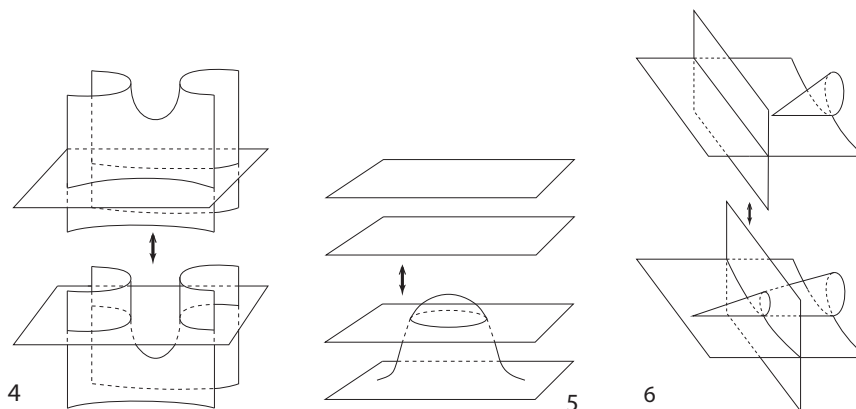


Рис. 4: Движения 4-6

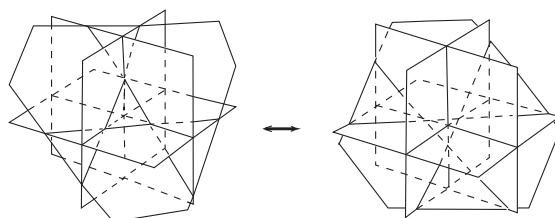


Рис. 5: Движение 7

1.8 Полином Джонса

В основном материал этой лекции излагается по источникам [2].

Определение 6 *Скобкой Кауффмана называется функция от диаграммы неориентированного узла в полиномы Лорана с целыми коэффициентами от формальной*

переменной A , то есть отображение $D \rightarrow \langle D \rangle \in \mathbb{Z}[A^{-1}, A]$ удовлетворяющее условиям:

$$\begin{aligned} \langle \bigcirc \rangle &= 1 \\ \langle D \sqcup \bigcirc \rangle &= -(A^2 + A^{-2}) \langle D \rangle \\ \langle \times \rangle &= A \langle \curvearrowright \rangle + A^{-1} \langle \curvearrowleft \rangle \end{aligned}$$

В этом определении под \bigcirc понимается диаграмма тривиального узла, \sqcup операция несвязного объединения, знаки \curvearrowright и \curvearrowleft соответствуют двум возможным разрешениям пересечения. Данное определение является конструктивным, так как позволяет вычислять скобку рекуррентно по параметру количества двойных точек на диаграмме.

Лемма 1 Если диаграмма меняется под действием движения Рейдемейстера типа 1, то скобка меняется следующим образом

$$\langle \curvearrowright \rangle = -A^3 \langle \frown \rangle, \quad \langle \curvearrowleft \rangle = -A^{-3} \langle \frown \rangle,$$

движения типа 2 и 3 при этом не меняют скобки Кауффмана.

Доказательство

Докажем утверждение для первого движения.

$$\langle \curvearrowright \rangle = A \langle \curvearrowleft \rangle + A^{-1} \langle \curvearrowright \rangle = (-A(A^2 + A^{-2}) + A^{-1}) \langle \frown \rangle$$

Доказательство для второго и третьего движения представлено на картинке

$$\begin{aligned} \langle \curvearrowright \rangle &= A \langle \curvearrowleft \rangle + A^{-1} \langle \curvearrowright \rangle \\ &= -A^{-2} \langle \rangle \langle \rangle + \langle \rangle + A^{-2} \langle \rangle \langle \rangle. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \curvearrowleft \rangle &= A \langle \curvearrowright \rangle + A^{-1} \langle \curvearrowleft \rangle \\ &= A \langle \curvearrowright \rangle + A^{-1} \langle \curvearrowleft \rangle \\ &= \langle \curvearrowright \rangle. \end{aligned}$$

□

Определение 7 Для диаграммы D ориентированного узла введем величину $\omega(D)$, называемую числом закрученности, равную числу пересечений со знаком. При этом знак определяется из соглашения:

$$+1 \quad \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow \\ \nearrow \end{array} \quad -1$$

Теорема 5 Пусть D диаграмма ориентированного зацепления L . Тогда выражение

$$(-A)^{-3\omega(D)} \langle D \rangle$$

является инвариантом зацепления.

Определение 8 Полиномом Джонса $V(L)$ ориентированного зацепления L называется полином Лорана от $t^{1/2}$ с целыми коэффициентами, определяемый формулой:

$$V(L) = ((-A)^{-3\omega(D)} \langle D \rangle)_{t^{1/2}=A^{-2}} \in \mathbb{Z}[t^{-1/2}, t^{1/2}],$$

где D - некоторая диаграмма зацепления L .

Предложение 1 Полином Джонса, как функция на пространстве ориентированных зацеплений удовлетворяет следующим свойствам:

1. $V(\text{тривиальный узел}) = 1$,
2. Если три ориентированных зацепления L_+ , L_- и L_0 отличаются локально, как показано на картинке,



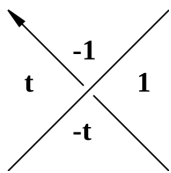
то их значения связаны соотношением:

$$t^{-1}V(L_+) - tV(L_-) + (t^{-1/2} - t^{1/2})V(L_0) = 0,$$

3. Если K_1 и K_2 два узла, то верно равенство $V(K_1 + K_2) = V(K_1)V(K_2)$.

1.9 Полином Александера

Приведем здесь определение еще одного важного полиномиального инварианта узлов. Начнем с описания процедуры вычисления данного полинома. Рассмотрим диаграмму ориентированного узла с n пересечениями. На диаграмме имеется $n + 2$ области, раскрасим эти области символами $0, 1, -1, t - 1$ исходя из локального правила в окрестности двойной точки, изображенного на рисунке:



Оказывается, что такой способ согласован. Он позволяет построить матрицу “инцидентности” двойных точек и областей размера $n \times (n + 2)$. Правило вычисления полинома следующее:

- Удалим любые два столбца, соответствующие смежным областям.
- У оставшейся матрицы вычислим определитель.
- Разделим полином на младшую степень t .
- Разделим полином на старший коэффициент.

Например, для трилистника получим $t^2 - t + 1$.

Данный способ имеет исключительно гомологическое описание.

2 Лекция 2

2.1 Квандлы

Определение 9 (Матвеев 1982) Множество X с бинарной операцией $(a, b) \mapsto a * b$ называется квандлом (или дистрибутивным группоидом) если выполняются следующие условия:

- i) $\forall a \in X \quad a * a = a$
- ii) $\forall a, b \in X \quad \exists! c \in X : c * b = a$
- iii) $\forall a, b, c \in X \quad (a * b) * c = (a * c) * (b * c)$

Замечание 4 Можно ассоциировать данные аксиомы с тремя движения Рейдемейстера.

Пример 4 Групповым квандлом называется квандл на множестве элементов группы G с операцией $a * b = b^{-n}ab^n$ для фиксированного значения n .

Пример 5 Квандлом Александра называется Λ -модуль M , где $\Lambda = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$, с операцией $a * b = ta + (1 - t)b$.

Пример 6 Квандлом является множество из трех элементов $\{a, b, c\}$ с операцией

$$\begin{aligned} a * b &= c \\ b * c &= a \\ c * a &= b \end{aligned}$$

Этот квандл также совпадает с множеством нечетных перестановок в S_3 относительно операции сопряжения.

В работе [3] определяются когомологии квандлов, мы здесь воспроизведем эту конструкцию.

Для начала рассмотрим комплекс $C_n^R(X)$ компоненты которого являются свободными абелевыми группами, порожденными наборами из n элементов множества X (x_1, \dots, x_n) . Дифференциал $\partial_n : C_n^R(X) \rightarrow C_{n-1}^R(X)$ задается формулой:

$$\begin{aligned} \partial_n(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{i=2}^n (-1)^i \{(x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \\ &\quad - (x_1 * x_i, x_2 * x_i, \dots, x_{i-1} * x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)\} \end{aligned}$$

Рассмотрим также подкомплекс $C_n^D(X)$, компоненты которого порождены наборами n элементов (x_1, \dots, x_n) таких, что $x_i = x_{i+1}$ для некоторого i и $n \geq 2$. Собственно, гомологии и когомологии квандла со значениями в группе G определяются на фактор-комплексе $C_n^Q(X) = C_n^R(X)/C_n^D(X)$ с индуцированным дифференциалом:

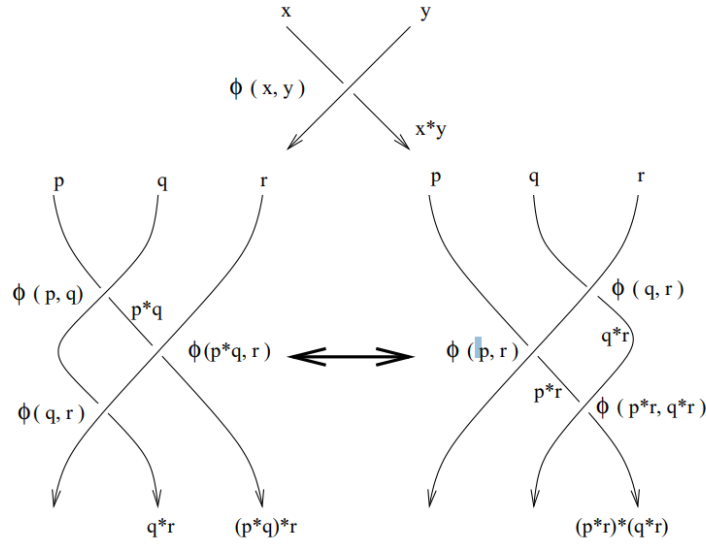
$$\begin{aligned} C_*^Q(X, G) &= C_*^Q(X) \otimes G, & \partial &= \partial \otimes id \\ C_Q^*(X, G) &= Hom(C_*^Q(X), G), & \delta &= Hom(\partial, id) \end{aligned}$$

2.2 Квандлы и инварианты 1-узлов

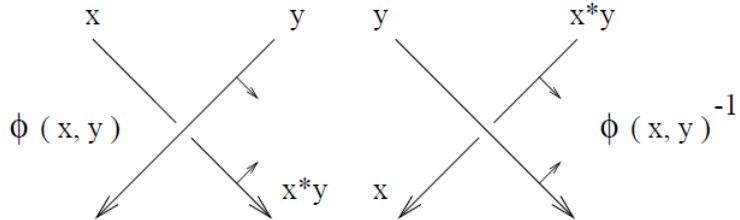
Рассмотрим квандл X и 2-коцикл $\phi : X \times X \rightarrow A$ со значениями в абелевой группе A , то есть отображение, удовлетворяющее

$$\begin{aligned}\phi(a, b)\phi(a * b, c) &= \phi(a, c)\phi(a * c, b * c) \\ \phi(a, a) &= 1\end{aligned}$$

для любых значений $a, b, c \in X$. Здесь для удобства приняты мультипликативные обозначения в группе. Мы не будем различать выражения в группе и соответствующем групповом кольце. Имеется удобное графическое представление условия коцикла:



Рассмотрим диаграмму D узла $k : S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Выберем также раскраску диаграммы элементами квандла X так, чтобы в окрестности каждого пересечения τ выполнялось соотношение



в котором применение элемента y выполняется по направлению против часовой стрелки по отношению к ориентации ребра, раскрашенного y (этот способ не зависит от ориентации нижнего ребра). Определим также знак двойной точки $\sigma(\tau)$, как ориентацию пары верхнего и нижнего ребра в этой точке. Знак позволяет определить Больцмановский вес в двойной точке, как $\phi^{\sigma(\tau)}(x, y)$ в соответствии с рисунком выше.

Определение 10 *Статсуммой, ассоциированной с диаграммой узла D и 2-коциклом ϕ называется выражение*

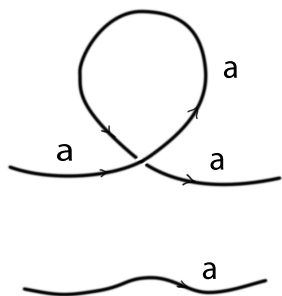
$$Z(D, \phi) = \sum_C \prod_{\tau} \phi^{\sigma(\tau)}(x, y)$$

Теорема 6 В предположениях выше статсумма $Z(D, \phi)$ инвариантна относительно движений Рейдемейстера, то есть является инвариантом узла, кроме того, она зависит только от класса коцикла ϕ . При выборе тривиального коцикла статсумма дает количество раскрасок диаграммы.

Доказательство

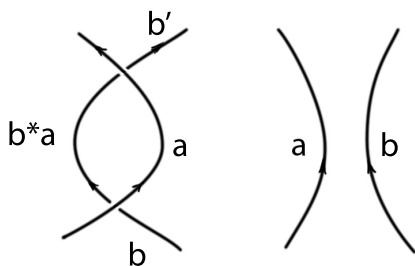
Докажем сначала инвариантность относительно движений Рейдемейстера.

- I-е движение Для доказательства рассмотрим локальный фрагмент диаграммы до и после движения.



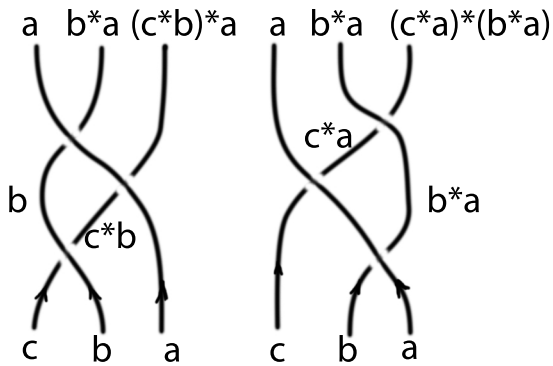
Заметим, что имеется взаимно-однозначное соответствие пространств раскрасок двух диаграмм. Кроме того, в силу одного из условий коцикла $\phi(a, a) = 1$ на диаграмме с дополнительной тройной точкой эта точка имеет тривиальный вклад в общую статсумму.

- II-е движение Рассмотрим диаграмму, соответствующую этому движению.



Заметим, что в силу 2-й аксиомы квандла $b' = b$. Таким образом, получим, как и в первом случае взаимно-однозначное соответствие пространств раскрасок диаграммы элементами квандла. Обратим теперь внимание на вклад в статсумму обеих сторон движения. На левой диаграмме имеются две дополнительные двойные точки, но их вклад будет тривиальным в силу разной ориентации $\phi(a, b)\phi(a, b)^{-1}$.

- III-е движение При доказательстве инвариантности относительно 3-го движения рассмотрим сначала диаграмму со всеми тройными точками, ориентированными положительно (все косы идут снизу вверх), и убедимся в наличии взаимно-однозначного соответствия пространств раскрасок.

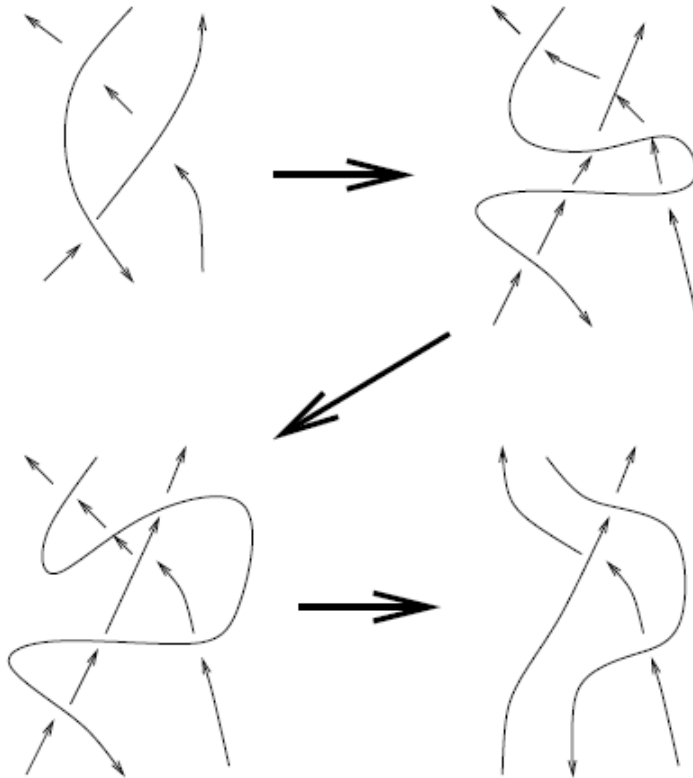


Действительно, раскраски диаграммы вне области преобразования совпадают в силу третьей аксиомы квантла. Найдем вклад левой и правой частей в общую статсумму:

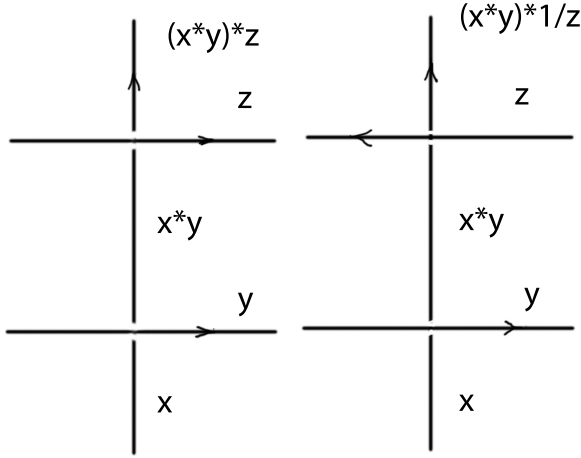
$$\phi(b, a)\phi(c, a)\phi(c * a, c * a) = \phi(c, b)\phi(c * b, a)\phi(b, a),$$

где равенство достигается за счет условия коцикла.

Доказательство инвариантности в случае других ориентаций вытекает из трюка Кауфмана, состоящего в том, что третье движение может быть приведено к стандартной ориентации за счет применения последовательности 2-х движений.



Докажем теперь факт, что статсумма зависит только от класса когомологий 2-коцикла. Рассмотрим сначала кограницу в качестве коцикла $\phi(x, y) = \psi(x)\psi(x * y)^{-1}$. Рассмотрим две соседние двойные точки с общим нижним ребром. Будем рассматривать две возможные конфигурации



Верхнее ребро правой картинке раскрашено цветом w , таким что $w * z = x * y$. Такой цвет существует в силу 2-й аксиомы квандла. Вычислим произведения Больцмановских весов в этих двух точках. Для картинке слева получим:

$$\psi(x)\psi(x * y)^{-1}\psi(x * y)\psi(w)^{-1}$$

Заметим, что вклад среднего ребра сократится. Для картинке справа вклад среднего ребра тоже сокращается

$$\psi(x)\psi(x * y)^{-1}\psi(w)^{-1}\psi(w * z)$$

в силу различной ориентации двойных точек и определения цвета w .

□

Пример 7 *Количество трехцветных раскрасок узла получается, если вычислить инвариант, описанный в этом разделе, для квандла из примера 6 и тривиального коцикла.*

2.3 Квандлы и инварианты 2-узлов

Определение квандлов и их когомологий позволяет предъявить следующую конструкцию для инвариантов 2-узлов. Обозначим за L множество 2-листов диаграммы после разрезания.

Определение 11 *Раскраской C диаграммы D 2-узла элементами квандла Q называется отображение $C : L \rightarrow Q$ удовлетворяющее соотношению согласованности в окрестности дуги двойной точки и в окрестности тройной точки, представленное на рисунке ниже*

Условие 3-коцикла $\theta \in Z_Q^3(Q, A)$ в данном случае эквивалентно следующему

$$\theta(p, r, s) \times \theta(p * r, q * r, s) \times \theta(p, q, r) = \theta(p * q, r, s) \times \theta(p, q, s) \times \theta(p * s, q * s, r * s)$$

Как и в случае с 2-коциклом, это условие имеет удобную графическую интерпретацию на рисунках 7 и 8.

Сопоставим тройной точке диаграммы τ Больцмановский вес

$$B(\tau, C) = \theta(x, y, z)^{\epsilon(\tau)}$$

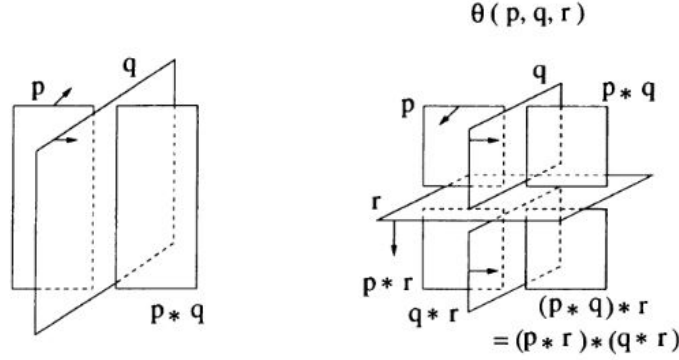


Рис. 6: Раскраска

где $\epsilon(\tau)$ знак тройной точки τ , x, y, z - цвета верхнего, среднего и нижнего листов исходящего октанта, то есть октанта, отрицательного для нормалей всех листов. Знак $\epsilon(\tau)$ определяется ориентацией нормалей. В этом случае статсумма задается выражением

$$S(D, \theta, A) = \sum_C \prod_{\tau} B(\tau, C). \quad (1)$$

Теорема 7 (Carter, ... 03) *Статсумма 1 инвариантна относительно всех движений Розмана, то есть определяет инвариант 2-узла.*

Наметим здесь основные этапы доказательства. Докажем сначала, что требуют рассмотрения только движения Розмана, в которых фигурируют тройные точки. В нашем списке это движения 3, 6 и 7. Действительно, рассмотрим наиболее сложное движение - движение 4. Ниже представлены два варианта расположения двух листов движения:

Рассмотрим движение 3. В этом случае появляется две тройные точки разных знаков. Совпадают пространства раскрасок и веса в этих тройных точках компенсируют друг друга. В случае 6-го движения заметим сначала, что листы, содержащие точку ветвления, имеют одинаковую раскраску (это следует из аксиом квандлов. Из этого непосредственно следует, что вес тройной точки будет тривиальным $\theta(x, x, y) = \theta(x, y, y) = 1$.

Теперь обратимся к 7-му движению Розмана. Сложность здесь составляет множество вариантов знаков тройных точек и порядков листов на диаграмме. Докажем сначала инвариантность статсуммы в одной из конфигураций, а затем применим обобщение трюка Тураева в размерности 4. Фактически, инвариантность относительно 7-го движения стандартной конфигурации доказывается графически 7 и 8. Далее мы будем трансформировать произвольные конфигурации с 7-ым движением к стандартной путем добавления или удаления сокращающихся пар тройных точек.

3 Лекция 3

3.1 Алгебры Хопфа

Язык алгебр Хопфа оказался исключительно удобным при описании целого класса квантовых интегрируемых системы. Деформированная тензорная структура на

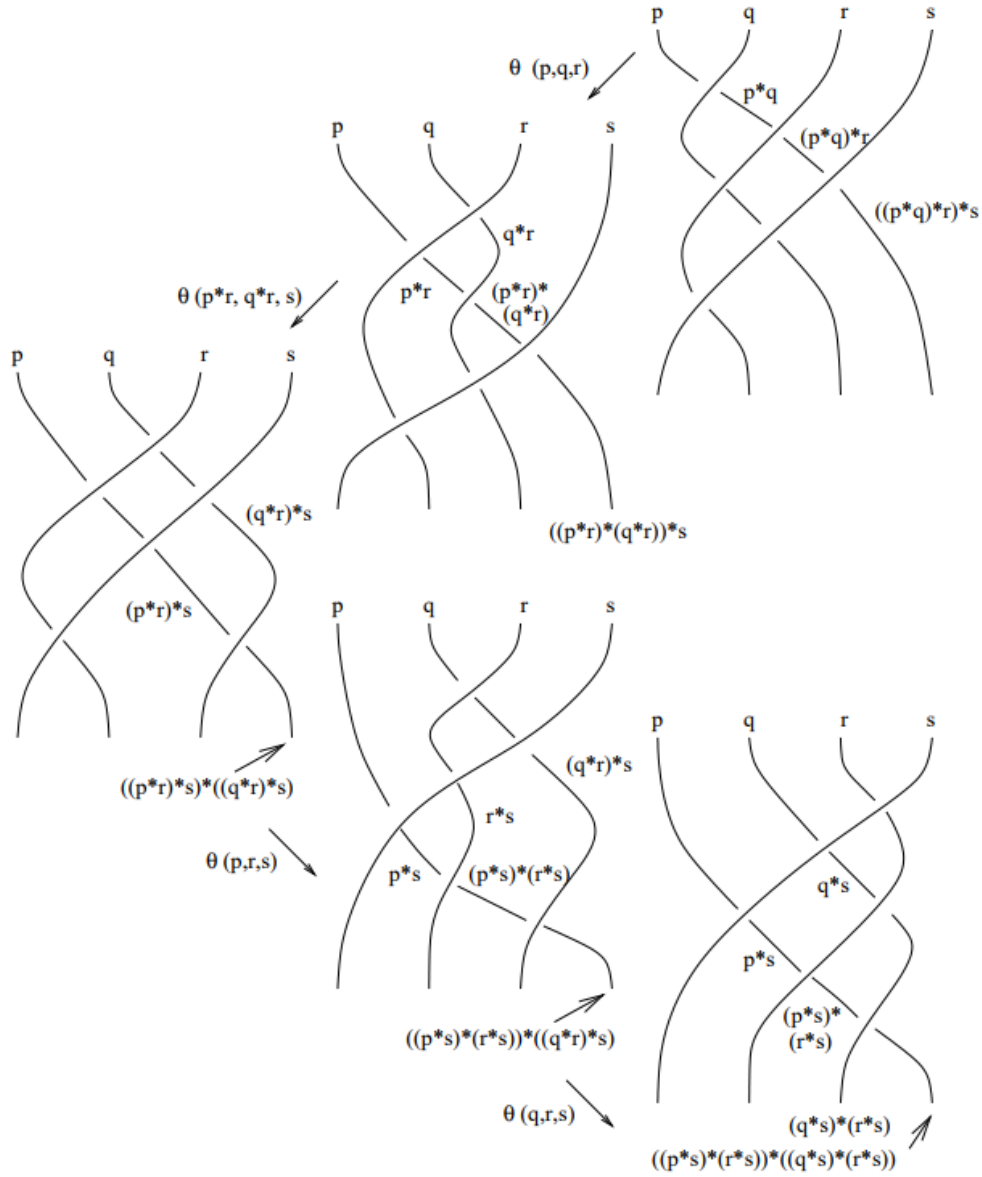


Рис. 7: Левая часть условия на 3-коцикл

категории представлений оказалась связанной с деформацией пространства симметрических полиномов на группе, предоставляющей новые примеры коммутирующих семейств.

Будем задавать ассоциативную алгебру A над полем k с помощью пары отображений $\mu : A \otimes A \rightarrow A$ и $\eta : k \rightarrow A$. Рассмотрим стандартное определение коалгебры, двойственного объекта для ассоциативной алгебры.

Определение 12 Коалгеброй над полем k называется тройка (C, Δ, ϵ) где C - k -пространство, и набор линейных отображений $\Delta : C \rightarrow C \otimes C$, $\epsilon : C \rightarrow k$ таких

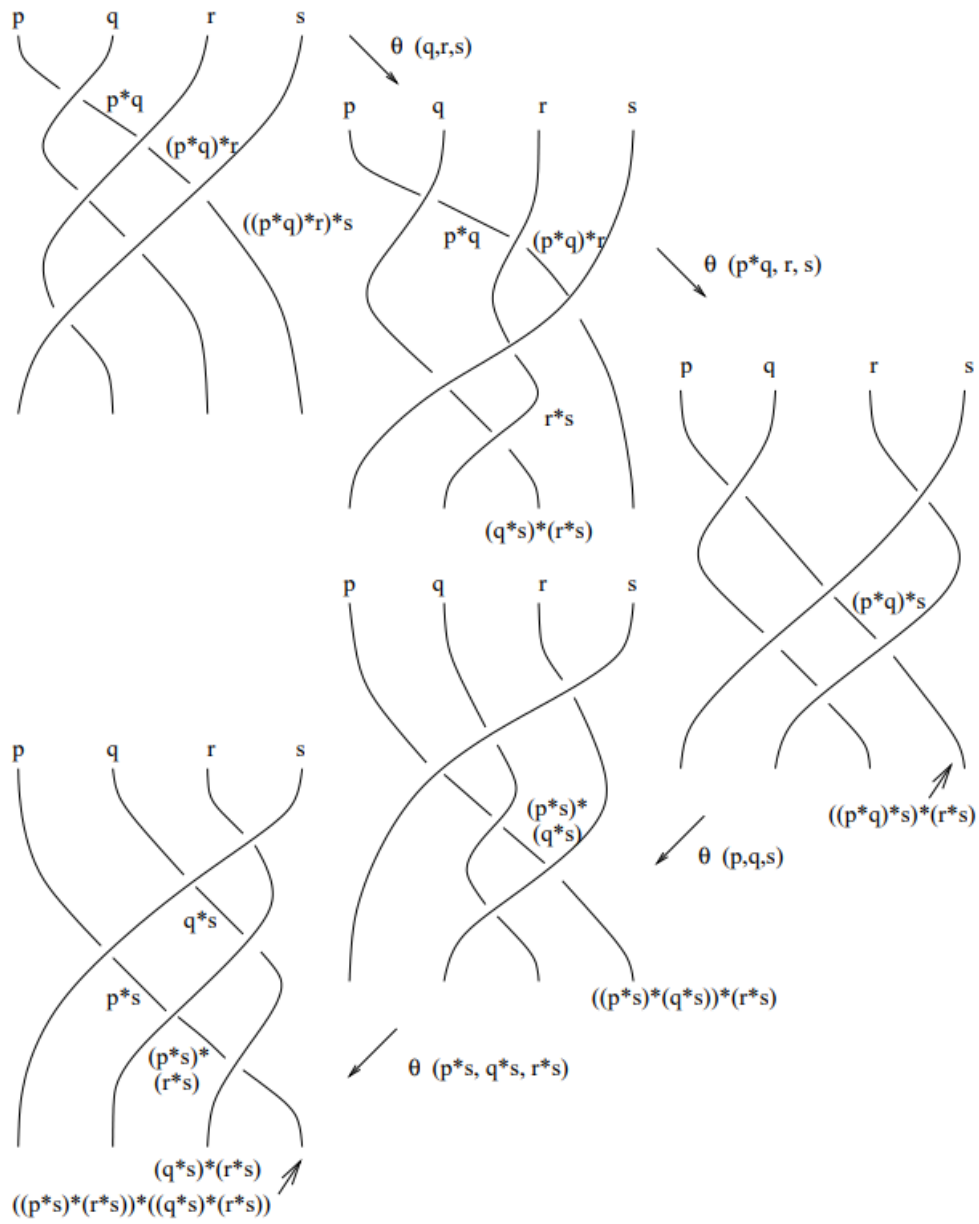
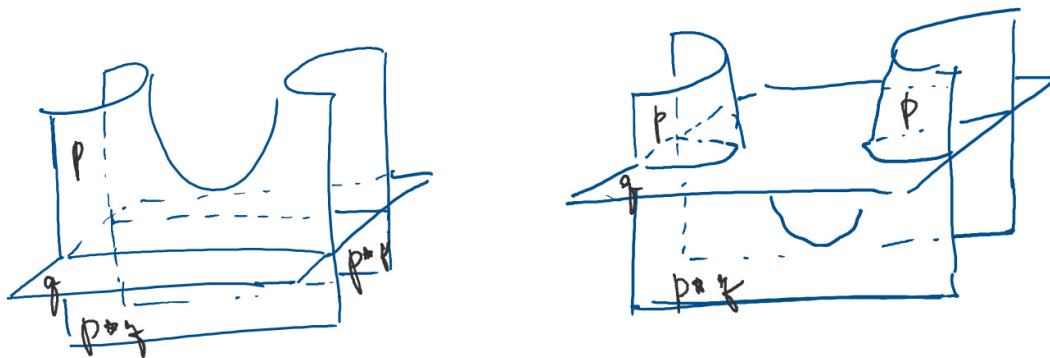
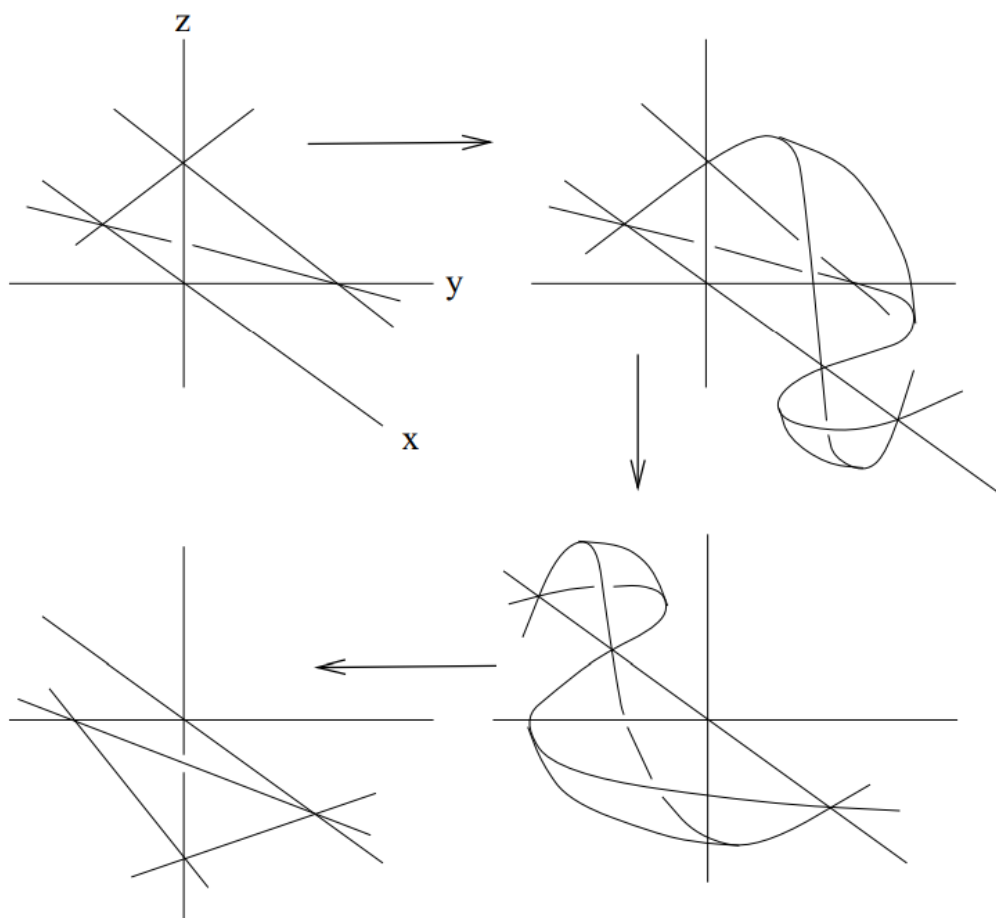
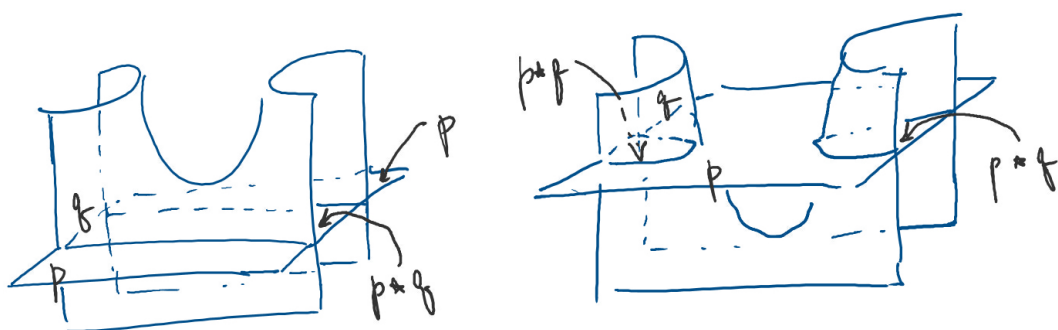


Рис. 8: Правая часть условия на 3-цикл



что следующие диаграммы коммутативны

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes C \\
 \downarrow \Delta & & \downarrow id \otimes \Delta \\
 C \otimes C & \xrightarrow{\Delta \otimes id} & C \otimes C \otimes C
 \end{array}$$



$$\begin{array}{ccccc}
 k \otimes C & \xleftarrow{\epsilon \otimes id} & C \otimes C & \xrightarrow{id \otimes \epsilon} & C \otimes k \\
 \uparrow id & & \uparrow \Delta & & \uparrow id \\
 C & \xleftarrow{id} & C & \xrightarrow{id} & C
 \end{array}$$

Коалгебра называется кокоммутативной если коммутативна диаграмма:

$$\begin{array}{ccc}
 C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes C \\
 \downarrow \Delta & & \downarrow id \\
 C \otimes C & \xrightarrow{\tau} & C \otimes C
 \end{array}$$

где τ обозначает оператор перестановки тензорных компонент.

Пример 8 Рассмотрим пространство полиномов от 4-х переменных $\{a, b, c, d\}$. Оказывается, что операция, определенная ниже на генераторах задает структуру

коалгебры на данном пространстве:

$$\begin{aligned}\Delta a &= a \otimes a + b \otimes c \\ \Delta b &= a \otimes b + b \otimes d \\ \Delta c &= c \otimes a + d \otimes c \\ \Delta d &= c \otimes b + d \otimes d\end{aligned}$$

Определение 13 Набор данных $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ называется биалгеброй, если H с приведенными отображениями является алгеброй и коалгеброй одновременно, причем отображения Δ и ϵ являются гомоморфизмами алгебр.

Определение 14 Алгеброй Хопфа называется биалгебра $(H, \mu, \nu, \Delta, \epsilon)$ с антиподом, то есть таким линейным отображением

$$S : H \rightarrow H$$

который удовлетворяет соотношениям:

$$\sum x_1 S(x_2) = \sum S(x_1) x_2 = \epsilon(x) 1 \quad \forall x \in H.$$

Гомоморфизмом алгебр Хопфа называется гомоморфизм биалгебр, коммутирующий с действием антипода.

Определение 15 Комодульной алгеброй A над биалгеброй H называется алгебра A на пространстве которой определено действие биалгебры, то есть линейное отображение:

$$\Delta_A : A \rightarrow H \otimes A$$

для которого отображения $\mu_A : A \otimes A \rightarrow A$ и $\eta_A : k \rightarrow A$ являются морфизмами H -комодулей.

Определение 16 Модульной алгеброй A над биалгеброй H называется алгебра A на пространстве которой определено действие биалгебры, то есть линейное отображение:

$$\Delta_A : A \rightarrow H \otimes A$$

для которого отображения $\mu_A : A \otimes A \rightarrow A$ и $\eta_A : k \rightarrow A$ являются морфизмами H -комодулей.

Замечание 5 Категория представлений над биалгеброй снабжается структурой тензорной категории. Действительно, тензорное произведение двух модулей $V_1 \otimes V_2$ естественно оснащено структурой модуля посредством применения коумножения:

$$\rho(h)(v_1 \otimes v_2) = h_1(v_1) \otimes h_2(v_2).$$

3.2 Симметрии квантовой плоскости

Напомним, что алгебра функций на группе $GL(2)$ или $SL(2)$ является алгеброй Хопфа и аффинная плоскость $A = \mathbb{K}[x, y]$ естественным образом оказывается комодульной алгеброй над данными алгебрами. Кодействие в этом случае задается формулой

$$\Delta_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим также алгебру ли \mathfrak{sl}_2 и ее универсальную обертывающую $U(\mathfrak{sl}_2)$. Оказывается, аффинная плоскость $A = \mathbb{K}[x, y]$ является модульной алгеброй над $U(\mathfrak{sl}_2)$, где действие задано так:

$$eP = x\partial_y P, \quad fP = y\partial_x P, \quad hP = x\partial_x P - y\partial_y P.$$

Здесь P - многочлен из $A = \mathbb{K}[x, y]$. Неприводимые представления \mathfrak{sl}_2 реализуются, как пространства многочленов фиксированной степени.

Эти две алгебры Хопфа оказываются двойственными, причем двойственность задается линейным отображением $\psi : M(2) \rightarrow (U(\mathfrak{sl}_2))^*$ как матричные коэффициенты в фундаментальном представлении $V(1/2)$.

Квантовые группы, так же как и классические, оказываются связанными с симметриями некоторых объектов. Мы будем рассматривать квантовую плоскость, которая описывается ассоциативной алгеброй

$$\mathbb{K}_q[x, y] = \mathbb{K}[x, y]/xy - qyx.$$

Геометрическая интерпретация подобного рода построений составляет предмет активно формирующейся области некоммутативной геометрии.

Рассмотрим алгебру

$$M_q(2) = \mathbb{K}[a, b, c, d]/J_q$$

где J_q - двусторонний идеал, порожденный соотношениями

$$\begin{aligned} ba &= qab; & db &= qbd; & ca &= qac; \\ dc &= qcd; & bc &= cb; & ad - da &= (q^{-1} - q)bc. \end{aligned}$$

Оказывается, что данные соотношения эквивалентны тому, что преобразования

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

задают “гомоморфизмы” квантовой плоскости. В данной алгебре имеется специальный элемент $\det_q = ad - q^{-1}bc = da - qbc$ называемый квантовым детерминантом. Собственно, линейная и специальная линейная квантовые группы определяются так:

$$GL_q(2) = M_q(2)[t]/t\det_q - 1; \quad SL_q(2) = M_q(2)/\det_q - 1 = GL_q(2)/t - 1.$$

Лемма 2 *На квантовой плоскости $A = \mathbb{K}_q[x, y]$ имеются единственные структуры $M_q(2)$ и $SL_q(2)$ -комодульной алгебры, такие что*

$$\Delta_A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

3.3 Структура $U_q(\mathfrak{sl}_2)$.

Пусть $q \neq \pm 1$. Введем стандартные q -обозначения:

$$\begin{aligned} [n] &= \frac{q^n - q^{-1}}{q - q^{-1}} \\ [k]! &= [1] \dots [k] \\ \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} &= \frac{[n]!}{[k]![n-k]!} \end{aligned}$$

Определение 17 Квантовой универсальной обертывающей алгеброй $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ называется алгебра, порожденная генераторами $\{X, Y, K, K^{-1}\}$ и соотношениями

$$\begin{aligned} KK^{-1} &= K^{-1}K = 1 \\ KXK^{-1} &= q^2X, \quad KYK^{-1} = q^{-2}Y, \\ XY - YX &= (K - K^{-1})/(q - q^{-1}). \end{aligned}$$

Структура коалгебры определяется так:

$$\begin{aligned} \Delta(X) &= 1 \otimes X + X \otimes K; & \Delta(Y) &= K^{-1} \otimes Y + Y \otimes 1; \\ \Delta(K) &= K \otimes K; & \Delta(K^{-1}) &= K^{-1} \otimes K^{-1}; \\ \epsilon(X) &= \epsilon(Y) = 0; & \epsilon(K) &= \epsilon(K^{-1}) = 1; \\ S(X) &= -XK^{-1}; & S(Y) &= -KY; & S(K) &= K^{-1}; & S(K^{-1}) &= K. \end{aligned}$$

Антипод удовлетворяет условию:

$$S^2(u) = KuK^{-1}.$$

Предложение 2 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ и $SL_q(2)$ являются двойственными алгебрами Хопфа.

Замечание 6 Описание центра $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ строится на конструкции квадратичного элемента Казимира

$$C_q = XY + \frac{q^{-1}K + qK^{-1}}{(q - q^{-1})^2} = YX + \frac{qK + q^{-1}K^{-1}}{(q - q^{-1})^2}.$$

В случае, когда q не является корнем из единицы

$$Z(U_q(\mathfrak{sl}_2)) = \mathbb{K}[C_q].$$

Замечание 7 Теория представлений $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ для q не равного корню из единицы устроена аналогично классической $U(\mathfrak{sl}_2)$, конечно-мерные неприводимые модули являются модулями старшего веса εq^n , где $\varepsilon = \pm 1$. Класс изоморфизмов модуля определяется только старшим весом. В корнях из единицы появляются другие представления в младших размерностях в виду того, что вырастает центр алгебры.

Простой модуль строится как фактор-модуль модуля Верма. Введем старший вектор v веса λ и векторы $v_p = ([p]!)^{-1}Y^p v$ для $p > 0$. Тогда действие генераторов на пространстве, порожденном этими векторами представляется формулами:

$$Kv_p = \lambda q^{-2p}v_p; \quad Xv_p = \frac{q^{-(p-1)}\lambda - q^{p-1}\lambda^{-1}}{q - q^{-1}}v_{p-1}; \quad Yv_{p-1} = [p]v_p.$$

3.4 Уравнение Янга-Бакстера

Уравнением Янга-Бакстера называется уравнение на элемент $R \in \text{End}(\mathcal{C}^n)^{\otimes 2}$

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12} \in \text{End}(\mathcal{C}^n)^{\otimes 3} \quad (2)$$

где индексы обозначают компоненты тройного тензорного произведения, в которых располагаются компоненты R . Если R представить в виде $R = \sum_i R_i^1 \otimes R_i^2$ то R_{13} будет выражением вида

$$R_{13} = \sum_i R_i^1 \otimes 1 \otimes R_i^2.$$

Заметим, что при замене $R = \tilde{R}P$ где P - матрица перестановки в тензорном квадрате, уравнение Янга-Бакстера эквивалентно соотношению группы кос

$$\tilde{R}_{12}\tilde{R}_{23}\tilde{R}_{12} = \tilde{R}_{23}\tilde{R}_{12}\tilde{R}_{23}$$

Уравнение Янга-Бакстера имеет следующую интерпретацию в терминах сплетенных биалгебр.

Определение 18 Биалгебра $(H, \mu, \eta, \Delta, \epsilon)$ называется квазикоммутативной, если существует обратимый элемент $R \in H \otimes H$ такой что $\forall x \in H$ выполнено $\Delta^{\text{op}}(x) = R\Delta(x)R^{-1}$. R -матрица в этом случае называется универсальной.

Определение 19 Квазикоммутативная алгебра называется сплетенной (или квазитреугольной в терминологии Дринфельда) если R удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes \text{id})R &= R_{13}R_{23}, \\ (\text{id} \otimes \Delta)R &= R_{13}R_{12}. \end{aligned}$$

Предложение 3 Если H - сплетенная биалгебра, то R удовлетворяет уравнению Янга-Бакстера. Кроме этого квадрат антипода является внутренним автоморфизмом.

$$\begin{aligned} R_{12}R_{13}R_{23} &= R_{12}(\Delta \otimes \text{id})(R) = (\Delta^{\text{op}} \otimes \text{id})(R)R_{12} \\ &= (\tau \otimes \text{id})(R)R_{12} = (\tau \otimes \text{id})(R_{13}R_{23})R_{12} = R_{23}R_{13}R_{12}. \end{aligned}$$

3.5 Дубль Дринфельда

Определение 20 Квантовым дублем Дринфельда $D(H)$ алгебры Хопфа H называется бискрепшенное произведение H и H^{op} , которое определяется на векторном пространстве $H^{\text{op}} \otimes H$, с единицей 1×1 , коумножением и коединицей:

$$\begin{aligned} \epsilon(f \otimes a) &= \epsilon(a)f(1); \\ \Delta(f \otimes a) &= \sum (f_1 \otimes a_1) \otimes (f_2 \otimes a_2); \end{aligned}$$

умножением:

$$(f \otimes a)(g \otimes b) = \sum fg(S^{-1}(a_3) * a_1) \otimes a_2b$$

где $g(S^{-1}(a_3) * a_1)$ обозначает элемент H^{op} , то есть линейный функционал

$$x \mapsto g(S^{-1}(a_3)xa_1)$$

Замечание 8 Алгебры H и H^{op} являются подалгебрами Хопфа в дубле, вложения задаются естественными отображениями:

$$i_H(a) = 1 \otimes a; \quad i_{H^{op}}(f) = f \otimes 1.$$

Отождествим пространства $H \otimes H^{op}$ и $End(H)$, рассматривая пополнение тензорного произведения, если необходимо. Тогда универсальная R -матрица определяется, как

$$R = (i_H \otimes i_{H^{op}})Id_H \in D(H) \otimes D(H).$$

При выборе базиса $\{e_i\}$ в H и двойственного базиса $\{e^i\}$ в H^{op} универсальная R -матрица приобретает вид

$$R = \sum_i (1 \otimes e_i) \otimes (e^i \otimes 1).$$

Теорема 8 В сделанных выше предположениях алгебра Хопфа $D(H)$ с элементом R является сплетенной.

Проиллюстрируем доказательство основного структурного уравнения, а именно $(\Delta \otimes id)R = R_{13}R_{23}$. В определении выше, это тождество эквивалентно следующему:

$$\sum_i 1 \otimes (e_i)_1 \otimes 1 \otimes (e_i)_2 \otimes e^i \otimes 1 = \sum_{i,j} 1 \otimes e_i \otimes 1 \otimes e_j \otimes e^i e^j \otimes 1.$$

Рассматривая только 2, 4, 5-ые тензорные компоненты и применяя их к элементу $f \otimes g \otimes a$ получим в левой части:

$$\sum_i f((e_i)_1)g((e_i)_2)e^i(a) = \sum_i fg(e_i)e^i(a) = fg(a).$$

В правой части аналогично получим:

$$\sum_{ij} f(e_i)g(e_j)e^i e^j(a) = \sum_{ij} f(e_i)g(e_j)e^i(a_1)e^j(a_2) = \sum_{ij} f(a_1)g(a_2) = fg(a).$$

Определение 21 Квантовой алгеброй Дринфельда-Джимбо $U_h(\mathfrak{sl}_2)$ называется алгебра, топологически порожденная образующими X, Y, H с соотношениями:

$$\begin{aligned} [H, E] &= 2E, & [H, F] &= -2F; \\ [E, F] &= \frac{\text{sh}(hH/2)}{\text{sh}(h/2)}. \end{aligned}$$

Замечание 9 Имеет место гомоморфизм алгебр $i : U_h \rightarrow U_q$ для которого

$$\begin{aligned} i(E) &= X e^{hH/4}; & i(F) &= e^{-hH/4} Y; & i(K) &= e^{hH/2}; \\ i(K^{-1}) &= e^{-hH/2}; & i(q) &= e^{h/2}. \end{aligned}$$

Теорема 9 Универсальной R -матрицей алгебры $U_h(\mathfrak{sl}_2)$ является элемент

$$R_h = e^{\frac{h(H \otimes H)}{4}} \left(\sum_{i \geq 0} \frac{(q - q^{-1})^i}{[i]_q!} q^{i(i-1)/2} (E^i \otimes F^i) \right) \in U_h \tilde{\otimes} U_h.$$

Замечание 10 Доказательство этого факта строится на построении гомоморфизма из дубля Дринфельда подалгебры $B_h \subset U_h$, порожденной элементами E, H , в алгебру U_h .

Далее на примере Янгиана мы познакомимся с "обратной" конструкцией, а именно с конструкцией алгебр Хопфа по решению уравнения Янга-Бакстера, называемой конструкцией Решетихина-Тахтаджяна-Фаддеева.

3.6 Янгиан

Данная алгебра Хопфа была построена в работе [4] и играет важную роль в задаче описания рациональных решений уравнения Янга-Бакстера. $Y(\mathfrak{g})$ прежде всего является ассоциативной алгеброй, порожденной элементами $t_{ij}^{(k)}$ (в данном разделе $i = 1, \dots, n; j = 1, \dots, n; k = 1, \dots, \infty$). Соотношения описываются в терминах производящей функции

$$T(u, \mathbf{h}) \in Y(\mathfrak{gl}_n) \otimes \text{End}(\mathbb{C}^n)[[u^{-1}, \mathbf{h}]],$$

имеющей вид

$$T(u, \mathbf{h}) = \sum_{i,j} E_{ij} \otimes t_{ij}(u, \mathbf{h}), \quad t_{ij}(u, \mathbf{h}) = \delta_{ij} + \sum_k t_{ij}^{(k)} \mathbf{h}^k u^{-k},$$

где E_{ij} - матричные единицы в $\text{End}(\mathbb{C}^n)$. Соотношения записываются с помощью R -матрицы Янга

$$R(u) = 1 - \frac{\mathbf{h}}{u} \sum_{i,j} E_{ij} \otimes E_{ji}$$

и принимают следующий вид

$$R(z - u, \mathbf{h})T_1(z, \mathbf{h})T_2(u, \mathbf{h}) = T_2(u, \mathbf{h})T_1(z, \mathbf{h})R(z - u, \mathbf{h}). \quad (3)$$

Обе части тождества рассматриваются как элементы

$$\text{End}(\mathbb{C}^n)^{\otimes 2} \otimes Y(\mathfrak{gl}_n)[[z^{-1}, z, u^{-1}, u, \mathbf{h}]],$$

при этом рациональная функция $\frac{1}{z-u}$ в выражении для R -матрицы раскладывается в ряд

$$\frac{1}{z - u} = \sum_{l=0}^{\infty} \frac{u^l}{z^{l+1}}.$$

В определяющих соотношениях приняты следующие обозначения

$$T_1(z, \mathbf{h}) = \sum_{i,j} E_{ij} \otimes 1 \otimes t_{ij}(z, \mathbf{h}), \quad T_2(u, \mathbf{h}) = \sum_{i,j} 1 \otimes E_{ij} \otimes t_{ij}(u, \mathbf{h}).$$

Янгиан является алгеброй Хопфа, коумножение в которой задано в терминах производящей функции следующей формулой:

$$(id \otimes \Delta)T(z, \mathbf{h}) = T^1(z, \mathbf{h})T^2(z, \mathbf{h}),$$

где используются следующие обозначения

$$T^1(z, \mathbf{h}) = \sum_{i,j} E_{ij} \otimes t_{ij}(z, \mathbf{h}) \otimes 1, \quad T^2(z, \mathbf{h}) = \sum_{i,j} E_{ij} \otimes 1 \otimes t_{ij}(z, \mathbf{h}).$$

3.7 „Представление вычисления“

Напомним конструкцию так называемого гомоморфизма „вычисления“ $\rho : Y(\mathfrak{gl}_n) \rightarrow U(\mathfrak{gl}_n)$. Для этого определим рациональную функцию по u, \mathbf{h} со значениями в $End(\mathbb{C}^n) \otimes U(\mathfrak{g})$

$$T_{ev}(u, \mathbf{h}) = 1 + \frac{\mathbf{h}}{u} \sum_{i,j} E_{ij} \otimes e_{ij} \stackrel{def}{=} 1 + \frac{\mathbf{h}\Phi}{u}, \quad (4)$$

где e_{ij} - генераторы \mathfrak{g} . $T_{ev}(u, \mathbf{h})$ удовлетворяет РТТ соотношению (3), следовательно отображение $\{t_{ij}^{(1)} \mapsto e_{ij}; t_{ij}^{(k)} \mapsto 0 \text{ при } k > 1\}$ определяет гомоморфизм алгебр.

Рассмотрим тензорное произведение $U(\mathfrak{g})^{\otimes N}[[\mathbf{h}, \mathbf{h}^{-1}]]$ и производящую функцию (4) для отображения вычисления в l -ю компоненту рассматриваемого тензорного произведения $T_{ev}^l(u - z_l, \mathbf{h})$. Оказывается, что для произвольного набора комплексных чисел (z_1, \dots, z_N) , выражение

$$T^\alpha(u, \mathbf{h}) = T_{ev}^1(u - z_1, \mathbf{h}) T_{ev}^2(u - z_2, \mathbf{h}) \dots T_{ev}^k(u - z_N, \mathbf{h}), \quad (5)$$

являющееся рациональной функцией от u и \mathbf{h} со значениями в $End(\mathbb{C}^n) \otimes U(\mathfrak{g})^{\otimes N}$, определяет гомоморфизм $\rho_\alpha : Y(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g})^{\otimes N}[[\mathbf{h}, \mathbf{h}^{-1}]]$, а именно, имеет место следующая

Лемма 3 *Отображение, ставящее в соответствие генератору Янгиана $t_{ij}^{(k)}$ ij -й матричный элемент коэффициента разложения $T^\alpha(u, \mathbf{h})\mathbf{h}^{-k}$ в $u = \infty$ при u^{-k} , определяет гомоморфизм алгебр*

$$\rho_\alpha : Y(\mathfrak{g}) \rightarrow U(\mathfrak{g})^{\otimes N}[[\mathbf{h}, \mathbf{h}^{-1}]].$$

Данная лемма следует из существования гомоморфизма коумножения и гомоморфизма вычисления.

4 Лекция *

4.1 Подалгебра Бете

Данная подалгебра тесно связана с Квантовым Методом Обратной Задачи (КМОЗ) [?, ?, ?], а именно ее генераторы являются квантовыми интегралами для ХХХ модели Гейзенберга [?, ?]. Далее используется описание подалгебры Бете работы [?] (раздел 2.14): рассмотрим комплекснозначную $n \times n$ -матрицу C и $T(u, \mathbf{h})$ - производящую функцию генераторов Янгиана $Y(\mathfrak{g})$. Введем также обозначение A_n для матрицы антисимметризатора в пространстве $(\mathbb{C}^n)^{\otimes n}$ и следующие элементы $End(\mathbb{C}^n)^{\otimes n} \otimes Y(\mathfrak{g})[[u, u^{-1}, \mathbf{h}]]$

$$T_m(u, \mathbf{h}) = \sum_{ij} 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes E_{ij}^m \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 \otimes t_{ij}(u, \mathbf{h}).$$

Оказывается [?] (раздел 2.14), что выражения вида

$$\tau_k(u, \mathbf{h}) = Tr A_n T_1(u, \mathbf{h}) T_2(u - \mathbf{h}, \mathbf{h}) \dots T_k(u - \mathbf{h}(k-1), \mathbf{h}) C_{k+1} \dots C_n \quad (6)$$

при $k = 1, \dots, n$, называемые генераторами Бете, порождают коммутативное семейство в $Y(\mathfrak{g})[[u, u^{-1}, \mathbf{h}]]$ в следующем смысле:

$$[\tau_i(u, \mathbf{h}), \tau_j(v, \mathbf{h})] = 0.$$

Кроме того, данное семейство максимально если матрица C имеет простой спектр. След в выражении 6 вычисляется по матричным компонентам $End(\mathcal{C}^n)^{\otimes n}$, а разложение в ряд для $T_m(u - \mathfrak{h}(m - 1), \mathfrak{h})$ вычисляется в окрестности $u = \infty$, например

$$\frac{1}{u - \mathfrak{h}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathfrak{h}^m}{u^{m+1}},$$

4.2 Коммутативность подалгебры Бете

Доказательство коммутативности в данном случае является обобщением коммутативности инвариантных полиномов на группе в классическом случае. Однако, техника, используемая для доказательства, существенно отличается, не смотря на то, что остается в основном комбинаторной. Мы следуем здесь работе ... Рассмотрим более подробно оператор антисимметризации $A_n \in End(\mathcal{C}^n)^{\otimes k}$, в частности являющийся проектором $A_n^2 = A_n$.

Предложение 4

$$k!(k-1)! \dots 1! A_k = \prod_{1 \leq p < k}^{\leftarrow} \left(\prod_{p < q \leq k}^{\leftarrow} R_{pq}(q-p) \right).$$

Доказательство мы оставляем слушателям. Дадим лишь указание, что его можно проводить по индукции, используя при этом универсальное свойство антисимметризатора в групповой алгебре симметрической группы.

В частности, из утверждения выше следует:

$$A_k \otimes 1 T_1(u-1) \dots T_k(u-k) = T_k(u-k) \dots T_1(u-1) A_k \otimes 1.$$

Введем пространство $F_k(\mathcal{C}^n) \in End(\mathcal{C}^n)^{\otimes k}$

$$F_k(\mathcal{C}^n) = \{X \in End(\mathcal{C}^n)^{\otimes k} \mid A_k X = A_k X A_k\}.$$

Заметим, что

$$T_1(u-1) \dots T_k(u-k) \in F_k(\mathcal{C}^n) \otimes Y(\mathfrak{gl}_n)[[u^{-1}]].$$

Будем также обозначать как ϕ_k отображение $F_k(\mathcal{C}^n) \rightarrow End(\wedge^k \mathcal{C}^n)$ определяемое формулой:

$$\phi_k(X) = A_k X.$$

Теперь приступим непосредственно к доказательству. Заметим, что

$$A_n T_1(u-1) \dots T_n(u-1) = A_n \tau_n(u).$$

Введем также обозначения для обратной матрицы

$$\hat{T}(u) = T^{-1}(u)$$

в терминах которой генераторы подалгебры Бете будут выражаться формулами:

$$\tau_k(u) = \tau_n(u) Tr A_n \hat{T}_n(u-n) \dots \hat{T}_{k+1}(u-k-1) C_{k+1} \dots C_n.$$

Введем также обозначения:

$$\hat{\tau}_k(u) = Tr A_r \hat{T}_k(u-k) \dots \hat{T}_1(u-1) C_1 \dots C_k.$$

Основное утверждение эквивалентно коммутативности $[\hat{\tau}_k(u), \hat{\tau}_l(v)] = 0$. Рассмотрим следующий элемент:

$$P(u) = \prod_{1 \leq p \leq k}^{\rightarrow} \left(\prod_{k < q \leq k+l}^{\leftarrow} R_{pq}(u-p+q) \right)$$

который удовлетворяет соотношениям:

$$\begin{aligned} A_k \otimes 1P(u) &= \prod_{1 \leq p \leq k}^{\leftarrow} \left(\prod_{k < q \leq k+l}^{\leftarrow} R_{pq}(u-p+q) \right) \\ 1 \otimes A_l P(u) &= \prod_{1 \leq p \leq k}^{\rightarrow} \left(\prod_{k < q \leq k+l}^{\rightarrow} R_{pq}(u-p+q) \right). \end{aligned}$$

В частности верно $P(u) \in F_k(\mathcal{C}^n) \otimes F_l(\mathcal{C}^n)$. Рассмотрим также образ P в $End(\wedge^k \mathcal{C}^n) \otimes End(\wedge^l \mathcal{C}^n)$

$$\bar{P}(u) = \phi_k \otimes \phi_l(P(u)) = A_k \otimes A_l P(u)$$

являющийся обратимым линейным оператором при общем значении параметра u . Заметим, что

$$P(u-v) \otimes 1T_1(u-1) \dots T_k(u-k)T_{k+1}(v-1) \dots T_{k+l}(v-l) = T_{k+1}(v-1) \dots T_{k+l}(v-l)T_1(u-1) \dots T_k(u-k)$$

Введем также обозначения

$$\begin{aligned} K(u) &= \phi_k \otimes \phi_l \otimes 1(\hat{T}_k(u-k) \dots \hat{T}_1(u-1)) \\ L(u) &= \phi_k \otimes \phi_l \otimes 1(\hat{T}_{k+l}(u-l) \dots \hat{T}_{k+1}(u-1)) \\ W &= \wedge^k \mathcal{C} \otimes \wedge^l \mathcal{C} \otimes 1. \end{aligned}$$

Тогда

$$\hat{B}_k(u)\hat{B}_l(v) = tr \otimes 1(K(u)L(v)W)$$

Пользуясь коммутационными соотношениями получим

$$\begin{aligned} K(u)L(v)W\bar{P}(u-v) \otimes 1 &= K(u)L(v)\bar{P}(u-v) \otimes 1W \\ &= \bar{P}(u-v) \otimes 1L(v)K(u)W \end{aligned}$$

Далее, пользуясь тем, что \bar{P} обратим при общих значениях параметра под следом получим требуемое тождество.

5 Лекция 4

5.1 Парадигма статистической механики

Основной источник [10].

Статистическая физика в некотором смысле занимает промежуточное положение между классической механикой, термодинамикой и квантовой физикой. Центральной задачей является описание среднего макроскопического поведения сложных систем, для которых описаны законы элементарного взаимодействия частиц. Наиболее ярко это область проявилась при описании критических явлений, то есть поведения вещества при смене фазы, на что была категорически неспособна классическая термодинамика.

Постараемся формализовать положения статистической физики. В ее основе лежит концепция распределения Гиббса, предложенная в 1902 году. Рассматривается система с множеством состояний \mathcal{S} и функцией энергии состояния $E(s)$ называемой также гамильтонианом. Согласно гипотезе Гиббса, вероятность найти систему в состоянии s пропорциональна выражению

$$\exp[-E(s)/\kappa T]$$

где κ - константа Больцмана, T - температура внешней среды. Для нахождения собственной вероятности используется так называемая статистическая сумма по всем состояниям системы

$$Z = \sum_s \exp[-E(s)/\kappa T].$$

В этом случае вероятность выражается формулой:

$$P(s) = \frac{1}{Z} \exp[-E(s)/\kappa T].$$

Выражение для статистической суммы оказывается своего рода производящей функцией многих термодинамических величин. Например, значение полной энергии, то есть средней энергии системы выражается формулой:

$$\langle E \rangle = \kappa T^2 \partial_T (\ln Z).$$

Энтропия выражается так:

$$S = -\kappa \sum_s P(s) \ln P(s) = \kappa \ln Z + \langle E \rangle / T = \partial_T (\kappa T \ln Z) = -\partial_T F$$

где F называют свободной энергией, она выражается формулой:

$$F = \langle E \rangle - TS = -\kappa T \ln Z$$

5.2 Термодинамический предел и критические явления

Далее мы в основном будем рассматривать системы частиц со спином на некоторой решетке. Это значит, что состояние частицы определяется значением $\sigma = \pm 1$, а энергия состояния зависит от этих значений

$$E(\sigma) = E_0(\sigma) + E_1(\sigma)$$

где E_0 - вклад межмолекулярных сил, а $E_1(\sigma) = -H \sum_i \sigma_i$ - описывает взаимодействие частиц с внешним полем H .

В ситуации, когда есть семейство моделей разного размера, например решетка с N частицами, рассматривают предельные свойства при увеличении размера. В этом случае вычисляют свободную энергию на узел решетки

$$f(T) = -\kappa T \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \ln Z_N(T)$$

Также определяют приведенную на один узел решетки внутреннюю энергию и теплоемкость

$$\begin{aligned} u(T) &= -T^2 \partial_T (f(T)/T) \\ C(T) &= \partial_T u(T) \end{aligned}$$

Критическим называется поведение, например, если теплоемкость испытывает скачок логарифмической производной в окрестности критической точки T_c :

$$\begin{aligned} C(T) &\sim (T - T_c)^{-\alpha} \quad \text{при } T \rightarrow T_c^+ \\ C(T) &\sim (T_c - T)^{-\alpha'} \quad \text{при } T \rightarrow T_c^- \end{aligned}$$

Для спиновых систем рассматривают также величину намагниченности:

$$M(H, T) = \frac{1}{N} \langle \sum_i \sigma_i \rangle = \frac{1}{N Z_N} \sum_{\sigma} \sum_i \sigma_i \exp \left\{ -(E_0(\sigma) - H \sum_i \sigma_i) / \kappa T \right\}$$

Дифференцируя по H получим:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} M(H, T) = -\partial_H f(H, T)$$

Введем еще одно важное семейство характеристических функций статистических моделей - корреляционные функции спинов:

$$g_{ij} = \langle \sigma_i \sigma_j \rangle - \langle \sigma_i \rangle \langle \sigma_j \rangle$$

Предполагается, что корреляционные функции зависят только от вектора в пространстве, соединяющего локации рассматриваемых частиц, а также, что вне критических точек эти функции убывают экспоненциально с ростом длины этого вектора:

$$g(xv) \sim x^{-\tau} e^{-x/\xi} \quad \text{при } x \rightarrow \infty.$$

где v - некоторый вектор единичной длины, ξ - корреляционная длина в направлении v . В частности для двумерной модели Изинга корреляционная длина демонстрирует принципиально разное поведение при низких и высоких температурах. Буквально в критической точке корреляционная длина оказывается бесконечной, а корреляционная функция затухает по степенному закону

$$g_c(r) \sim r^{-d+2-\eta}$$

5.3 Одномерная модель Изинга

В общем случае модель Изинга определяется квадратичным гамильтонианом взаимодействия:

$$E_0(\sigma) = -J \sum_{i,j} \sigma_i \sigma_j$$

где суммирование выполняется по парам соседних узлов решетки. Для одномерной решетки соседними называются пары $i, i + 1$.

При положительном значении J состояние с наименьшей энергией соответствует одинаковым положениям спинов во всех точках. Такое поведение обычно называется ферромагнитным. При отрицательном J система называется антиферромагнитной.

Ограничимся пока одномерной периодической системой Изинга

$$E(\sigma) = -J \sum_{j=1}^N \sigma_j \sigma_{j+1} - H \sum_{j=1}^N \sigma_j$$

Предполагается, что $\sigma_{N+1} = \sigma_1$. Статистическая функция может быть представлена в виде:

$$Z_N = \sum_{\sigma} \exp \left\{ K \sum_{j=1}^N \sigma_j \sigma_{j+1} + h \sum_{j=1}^N \sigma_j \right\} \quad (7)$$

где $K = J/\kappa T, h = H/\kappa T$. Ключевым в дальнейшем изложении оказывается разложение статсуммы в виде произведения:

$$Z_N = \sum_{\sigma} \prod_{i=1}^N V(\sigma_i, \sigma_{i+1})$$

где $V(\sigma, \sigma') = \exp(K\sigma\sigma' + h/2(\sigma + \sigma'))$. Благодаря такому разложению статсумму можно представить в виде

$$Z_N = \text{Tr} V^N$$

где

$$V = \begin{pmatrix} V(+, +) & V(+, -) \\ V(-, +) & V(-, -) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{K+h} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{K-h} \end{pmatrix}.$$

Последнее выражение называется трансферматрицей модели. Пусть $\lambda_1 > \lambda_2$ собственные числа матрицы V . Тогда статсумма может быть выражена явно:

$$Z_N = \lambda_1^N + \lambda_2^N$$

Предел свободной энергии на узел решетки может быть легко вычислен:

$$f(H, T) = -\kappa T \ln \lambda_1 = -\kappa T \ln(e^K \text{ch } h + \sqrt{e^{2K} \text{sh}^2 h + e^{-2K}})$$

Дифференцируя по h получаем

$$M(H, T) = \frac{e^K \text{sh } h}{\sqrt{e^{2K} \text{sh}^2 h + e^{-2K}}}$$

Обе функции оказываются аналитическими и не имеют фазового перехода при положительных температурах. Отметим также выражение для корреляционной длины

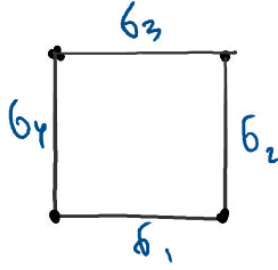
$$\xi = 1/\ln(\lambda_1/\lambda_2)$$

5.4 Двумерная модель Изинга, 8-и вершинная модель

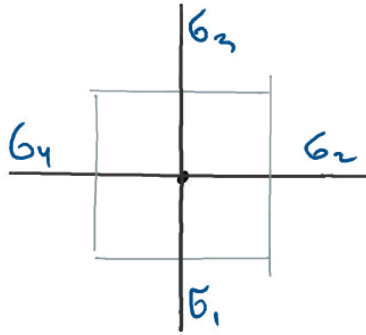
Современный алгебраический подход к статистическим моделям связан с интерпретацией последних, как вершинных моделей. Приведем эту конструкцию для двумерной анизотропной модели Изинга. Эта модель задается гамильтонианом

$$H(\sigma) = \sum_{ij} (K_1 \sigma_{ij} \sigma_{i+1j} + K_2 \sigma_{ij} \sigma_{ij+1})$$

Здесь константы K_1 и K_2 отвечают взаимодействию в горизонтальном и вертикальном направлении. Заметим, что взаимодействие относится к ребрам решетки, можно ввести новые переменные $\sigma_{ij} = \pm 1$ относящиеся к ребрам. Эти переменные не являются независимыми, на раскраски ребер квадратной ячейки выполняются соотноше-



ния: $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 = 1$. Эффективным оказывается переход к двойственной решетке



Тогда оказывается, что в вершине двойственной решетки допустимые раскраски перечисляются следующей схемой, где закрашенное ребро соответствует значению -1

Преимуществом такого способа описания модели оказывается тот факт, что статистическая сумма представляется в виде следа произведения матриц. Введем матрицу 4×4 , которую мы будем интерпретировать как линейный оператор в $End(\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2)$ с ненулевыми матричными коэффициентами:

$$\begin{aligned} R_{++}^{++} &= 1, & R_{--}^{--} &= e^{-2K_1 - 2K_2} \\ R_{+-}^{+-} &= e^{-2K_1}, & R_{-+}^{-+} &= e^{-2K_2} \\ R_{+-}^{-+} &= R_{-+}^{+-} = e^{-K_1 - K_2}, & R_{++}^{--} &= R_{--}^{++} = e^{-K_1 - K_2} \end{aligned}$$

Здесь \pm маркируют два базисных вектора в \mathbb{C}^2 . В этой модели статистический вес конфигурации представляется в виде вершинных весов

$$\prod_x R_{\alpha_x \mu_x}^{\beta_x \nu_x}$$

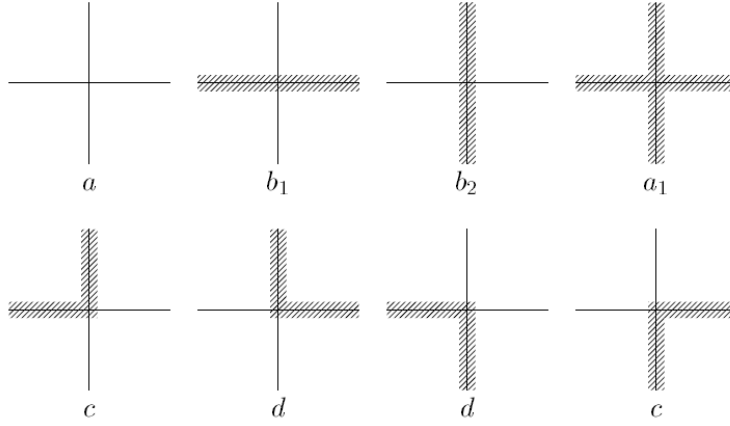


Рис. 9: Вершинные конфигурации

$$\begin{array}{c}
 | \beta \\
 \hline \mu \quad \nu \\
 | \alpha
 \end{array} = R_{\alpha\mu}^{\beta\nu}$$

где индексы определены рисунком

Статистическая сумма тогда определяется, как произведение матриц

$$Z = \prod_x R(x)$$

Введем понятие трансферматрицы. Для этого введем обозначение $H(\alpha)$ для пространства \mathbb{C}^2 ассоциированного с конкретным ребром решетки. В этих обозначениях

$$R(x) : H(\alpha_x) \otimes H(\mu_x) \rightarrow H(\beta_x) \otimes H(\nu_x).$$

Трансферматрица определяется как оператор

$$T : H(\alpha_1) \otimes \dots \otimes H(\alpha_n) \rightarrow H(\beta_1) \otimes \dots \otimes H(\beta_n)$$

действующий по формуле

$$T_{\alpha}^{\beta} = \sum_{\nu} \prod R_{\alpha_1\nu_1}^{\beta_1\nu_2} R_{\alpha_2\nu_2}^{\beta_2\nu_3} \dots R_{\alpha_n\nu_n}^{\beta_n\nu_1}.$$

Удобно представить эту матрицу графически:

Значение статистической суммы таки образом совпадает с выражением

$$Z = Tr T^m.$$

Это ключевое наблюдение позволило установить связь между некоторыми моделями статистической физики и точно-решаемыми квантовыми решетчатыми моделями

$$\begin{array}{cccc|c}
 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_n & \\
 \nu_1 & \hline & \nu_2 & \nu_3 & \dots & \hline & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_n & \\
 & & & & & \nu_{n+1} = \nu_1
 \end{array}$$

типа XXZ модели Гейзенберга. Собственно, связь устанавливается, если интерпретировать трансферматрицу, как оператор в квантовом пространстве системы. Тогда решение задачи нахождения спектра этого оператора, то есть задачи описания чистых состояний и уровней энергии, позволяет вычислить статистическую сумму. Действительно, пусть

$$T\psi_i = \lambda_i\psi_i$$

тогда

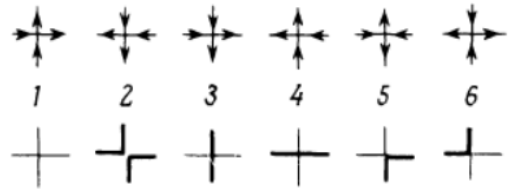
$$Z = \sum_{i=1}^{2^n} \lambda_i^n$$

В частности, вопросы термодинамического предела сводятся к нахождению старших собственных значений трансферматрицы.

6 Лекция 5

6.1 Модель льда

Эта модель представляет собой семейство 6-и вершинных моделей, то есть моделей, для которых только 6 из конфигураций на рис. 9 являются разрешенными.



Эта модель является общей для двумерной модели льда, модели сегнетоэлектрика дигидрофосфата калия, а также для так называемой F-модели. Отличия состоят в выборе весов соответствующих конфигураций.

6.2 Модель льда и магнетик Гейзенберга

Модель льда имеет представление статсуммы с помощью трансферматрицы

$$T = Tr_0 R_{01} \dots R_{0N}$$

где R определяется выражением

$$R = \begin{pmatrix} a & & & \\ & b & c & \\ & c & b & \\ & & & a \end{pmatrix}$$

Мы интерпретируем эту матрицу, как оператор в тензорном квадрате $\mathbb{C}^2 \otimes \mathbb{C}^2$. При этом первая пара индексов отвечает за выбор блока 2×2 в общей матрице, а вторая - за нумерацию элементов внутри блока. Используя стандартные обозначения для матриц Паули

$$\begin{aligned} \sigma^x &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \sigma^y &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} & \sigma^z &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ \sigma^+ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} & \sigma^- &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

выражение для R -матрицы может быть представлено в виде:

$$R = \begin{pmatrix} w_0 + w_1 \sigma^z & c \sigma^- \\ c \sigma^+ & w_0 - w_1 \sigma^z \end{pmatrix}$$

Для нас в дальнейшем будет важна специальная параметризация матричных элементов R -матрицы

$$\begin{aligned} a &= sh(u + \eta) \\ b &= sh(u) \\ c &= sh(\eta) \end{aligned}$$

Оказывается, что в такой параметризации R -матрица удовлетворяет уравнению Янга-Бакстера со спектральным параметром

$$R_{12}(u)R_{13}(v)R_{23}(v - u) = R_{23}(v - u)R_{13}(v)R_{12}(u).$$

Данное уравнение является обобщением уравнения без спектрального параметра, решения которого задают линейные представления группы kos .

Цель этого параграфа в установлении связи между моделью льда и моделью Гейзенберга. Квантовый гамильтониан XYZ-модели в терминах матриц Паули имеет вид:

$$H_{XYZ} = \sum_i (J_x \sigma_i^x \sigma_{i+1}^x + J_y \sigma_i^y \sigma_{i+1}^y + J_z \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z).$$

Имеется в виду оператор, действующий в пространстве $\mathbb{C}^2 \otimes \dots \otimes \mathbb{C}^2$. В случае $J_x = J_y \neq J_z$ цепочка называется XXZ .

Лемма 4 *Для подходящего выбора параметров гамильтониан XXZ цепочки Гейзенберга совпадает с точностью до скалярного оператора с выражением $T^{-1}(0)\dot{T}(0)$ в котором производная подразумевается по параметру u .*

Вычислим компоненты этого выражения. В начале обратим внимание на упрощение некоторых выражений в точке $u = 0$.

$$R(0) = \text{sh}(\eta) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \dot{R}(0) = \begin{pmatrix} \text{ch}(\eta) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \text{ch}(\eta) \end{pmatrix} \quad (8)$$

R -матрица пропорциональна матрице перестановки и имеет следующие матричные коэффициенты:

$$R_{\alpha\gamma}^{\beta\nu} = \text{sh}(\eta) \delta_{\alpha}^{\nu} \delta_{\gamma}^{\beta}.$$

Тогда выражение для трансферматрицы приобретает вид:

$$\begin{aligned} T(0) &= R_{\nu_1\alpha_1}^{\nu_2\beta_1} R_{\nu_2\alpha_2}^{\nu_3\beta_2} \dots R_{\nu_N\alpha_N}^{\nu_1\beta_N} = (\text{sh } \eta)^N \delta_{\nu_1}^{\beta_1} \boxed{\delta_{\alpha_1}^{\nu_2} \delta_{\nu_2}^{\beta_2}} \boxed{\delta_{\alpha_2}^{\nu_3} \delta_{\nu_3}^{\beta_3}} \delta_{\alpha_3}^{\nu_2} \dots \delta_{\nu_N}^{\beta_N} \delta_{\alpha_N}^{\nu_1} \\ &= (\text{sh } \eta)^N \delta_{\alpha_1}^{\beta_2} \delta_{\alpha_2}^{\beta_3} \dots \delta_{\alpha_N}^{\beta_1}. \end{aligned}$$

Такой оператор действует на разложимых векторах в тензорном произведении по формуле:

$$T(0)v_1 \otimes \dots \otimes v_{N-1} \otimes v_N = (\text{sh } \eta)^N v_2 \otimes \dots \otimes v_N \otimes v_1.$$

Легко вычислить обратный оператор для $T(0)$:

$$T^{-1}(0) = (\text{sh } \eta)^{-N} \delta_{\alpha_2}^{\beta_1} \delta_{\alpha_3}^{\beta_2} \dots \delta_{\alpha_1}^{\beta_N}.$$

Теперь вычислим производную:

$$\begin{aligned} \frac{d}{du} T(0) &= \sum_i \text{Tr}_0 R_{01}(0) \dots R_{0i-1}(0) \dot{R}_{0i}(0) R_{0i+1}(0) \dots R_{0N}(0) \\ &= (\text{sh } \eta)^{N-1} \sum_i \delta_{\alpha_1}^{\beta_2} \dots \delta_{\alpha_{i-2}}^{\beta_{i-1}} \dot{R}_{\alpha_{i-1}\alpha_i}^{\beta_{i+1}\beta_i} \delta_{\alpha_{i+1}}^{\beta_{i+2}} \dots \delta_{\alpha_N}^{\beta_1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T^{-1}(0) \frac{d}{du} T(0) &= \frac{1}{\text{sh } \eta} \sum_i \delta_{\gamma_2}^{\alpha_1} \dots \delta_{\gamma_1}^{\alpha_N} \delta_{\alpha_1}^{\beta_2} \dots \delta_{\alpha_{i-2}}^{\beta_{i-1}} \dot{R}_{\alpha_{i-1}\alpha_i}^{\beta_{i+1}\beta_i} \delta_{\alpha_{i+1}}^{\beta_{i+2}} \dots \delta_{\alpha_N}^{\beta_1} \\ &= \frac{1}{\text{sh } \eta} \sum_i \delta_{\gamma_1}^{\beta_1} \dots \delta_{\gamma_{i-1}}^{\beta_{i-1}} \dot{R}_{\gamma_i\gamma_{i+1}}^{\beta_{i+1}\beta_i} \delta_{\gamma_{i+2}}^{\beta_{i+2}} \dots \delta_{\gamma_N}^{\beta_N} \\ &= \sum_i R_{ii+1}^{-1}(0) \frac{d}{du} R_{ii+1}(0) \end{aligned}$$

Теперь заметим, что

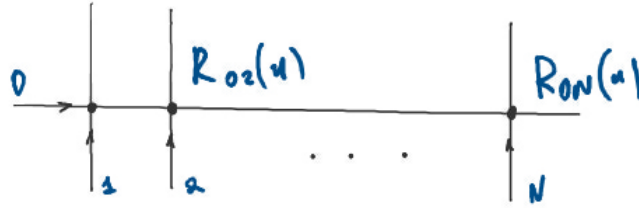
$$R^{-1}(0) \dot{R}(0) = \frac{1}{\text{sh } \eta} \begin{pmatrix} \text{ch } \eta & & & \\ & 0 & 1 & \\ & 1 & 0 & \\ & & & \text{ch } \eta \end{pmatrix} = \frac{1}{2 \text{sh } \eta} (\sigma_1^x \sigma_2^x + \sigma_1^y \sigma_2^y + \text{ch } \eta (I_1 I_2 + \sigma_1^z \sigma_2^z))$$

6.3 Коммутативное семейство

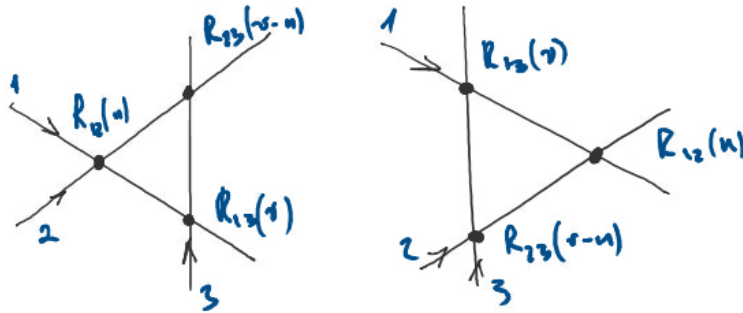
Оказывается, что связь двух моделей распространяется гораздо шире. А именно, трансферматрица порождает целое семейство операторов, коммутирующих с гамильтонианом модели ХХЗ и между собой. Этот факт является следствием алгебраической структуры, лежащей в основе квантового метода обратной задачи и теории квантовых групп. Введем в рассмотрение так называемую матрицу монодромии

$$L_0(u) = R_{01}(u) \dots R_{0N}(u)$$

Это оператор в пространстве $\mathbb{C}^2 \otimes (\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$. Удобно проиллюстрировать такое выражение графически:



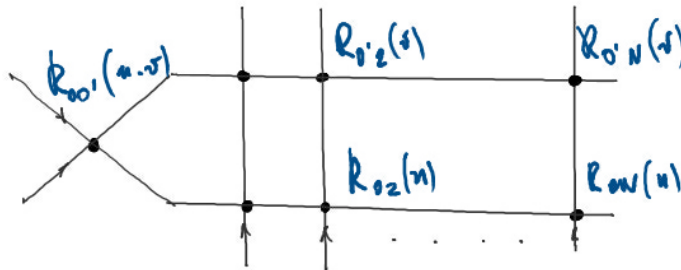
Стрелки на диаграмме указывают направление применения линейного оператора. Верно следующее $T(u) = Tr_0 L(u)$. Приведем здесь удобное для нас графическое представление уравнения Янга-Бакстера со спектральным параметром:



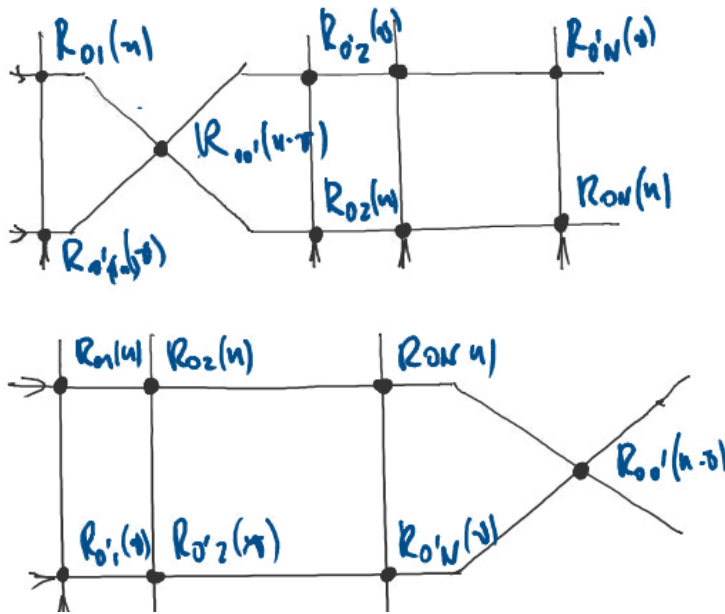
Лемма 5 Следствием соотношения уравнения Янга-Бакстера является следующее свойство:

$$R_{00'}(u-v)L_0(u)L_{0'}(v) = L_{0'}(v)L_0(u)R_{00'}(u-v). \quad (9)$$

Приведем здесь графическое доказательство этого факта. Левая часть уравнения может быть представлена схемой:



Применяя последовательно уравнение Янга-Бакстера получим после первого шага



И после N применений уравнения Янга-Бакстера получим:

Рассматривая след по вспомогательным пространствам $0, 0'$ получим структурное уравнение

$$[T(u), T(v)] = 0,$$

которое влечет, что $T(u)$ является производящей функцией целого семейства коммутирующих операторов, в котором также содержится гамильтониан XXZ модели Гейзенберга.

6.4 Алгебраический анзац Бете

Полученные в предыдущем разделе результаты позволяют свести задачу нахождения собственного базиса для гамильтониана модели XXZ к задаче диагонализации семейства операторов $T(u)$. Вспомним еще раз про матрицу монодромии $L(u)$, которую можно представить как матрицу 2×2 с коэффициентами в квантовом пространстве $(\mathbb{C}^2)^{\otimes N}$.

$$L_0(u) = \begin{pmatrix} L_+^+(u) & L_+^-(u) \\ L_-^+(u) & L_-^-(u) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(u) & B(u) \\ C(u) & D(u) \end{pmatrix}.$$

В этих обозначениях трансферматрица представляется формулой

$$T(u) = \text{Tr}_0 L(u) = A(u) + D(u).$$

Перепишем теперь соотношения (26) в виде коммутационных соотношений на коэффициенты матрицы монодромии:

$$\begin{aligned} [B(u), B(v)] &= 0 \\ b(v-u)A(u)B(v) &= a(v-u)B(v)A(u) - c(v-u)B(u)A(v) \\ b(u-v)D(u)B(v) &= a(u-v)B(v)D(u) - c(u-v)B(u)D(v) \end{aligned}$$

где

$$a(u) = \text{sh}(\eta - u), \quad b(u) = \text{sh}(u), \quad c(u) = \text{sh}(\eta).$$

Напомним еще раз выражение для R -матрицы, соответствующей одному экземпляру квантового пространства:

$$R = \begin{pmatrix} \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2}\sigma^z & c\sigma^- \\ c\sigma^+ & \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2}\sigma^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha(u) & \beta \\ \gamma & \delta(u) \end{pmatrix}.$$

Заметим тогда, что в i -ой копии квантового пространства вектор

$$e_i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

обладает специальными свойствами

$$R_{0i}e_i = \begin{pmatrix} a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} & c \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ 0 & b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

Далее заметим, что легко посчитать некоторые матричные элементы действия матрицы монодромии на вектор

$$\psi_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \otimes \dots \otimes \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

а именно:

$$L(u)\psi_0 = \begin{pmatrix} a^N\psi_0 & * \\ 0 & b^N\psi_0 \end{pmatrix}.$$

Это выражение эквивалентно системе:

$$\begin{cases} A(u)\psi_0 = a^N(u)\psi_0, \\ D(u)\psi_0 = b^N(u)\psi_0, \\ C(u)\psi_0 = 0. \end{cases}$$

В частности, по банальным причинам данный вектор оказывается собственным для трансферматрицы. Назовем его вакуумным. Будем искать остальные собственные векторы в специальном виде:

$$\psi(v_1, \dots, v_m) = B(v_1) \dots B(v_m)\psi_0.$$

С помощью коммутационных соотношений на элементы трансферматрицы определим условия на собственный вектор:

$$\begin{aligned} (A(u) + D(u))B(v_1) \dots B(v_m)\psi_0 = \\ \left(a^N(u) \prod_{i=1}^m \frac{\text{sh}(\eta + u - v_i)}{\text{sh}(v_i - u)} + b^N(u) \prod_{i=1}^m \frac{\text{sh}(\eta - u + v_i)}{\text{sh}(u - v_i)} \right) B(v_1) \dots B(v_m)\psi_0 \\ + \sum_{i=1}^m \Lambda_i B(u) \prod_{j \neq i} B(v_j)\psi_0 \end{aligned}$$

где Λ_i задаются формулами:

$$\Lambda_i = \frac{c(u - v_i)}{b(u - v_i)} \left(a^N(v_i) \prod_{j \neq i} \frac{a(v_j - v_i)}{b(v_j - v_i)} - b^N(v_i) \prod_{j \neq i} \frac{a(v_i - v_j)}{b(v_i - v_j)} \right).$$

Технология вычисления Λ_i такова: вычислим Λ_1 . Еще раз перепишем коммутационные соотношения:

$$A(u)B(u) = \frac{a(v-u)}{b(v-u)}B(v)A(u) - \frac{c(v-u)}{b(v-u)}B(u)A(v).$$

Для вычисления Λ_m при проносе $A(u) + D(u)$ через произведение при коммутировании $A(u) + D(u)$ с $B(v_1)$ будем использовать только второй член, а при дальнейшем коммутировании $A(v_1) + D(v_1)$ будем наоборот использовать только первый член. В результате получится нужное выражение. Для нахождения остальных членов заметим что в силу коммутативности операторов $B(v_i)$ результат применения должен быть симметричным по переменным v_1, \dots, v_m и следовательно остальные коэффициенты будут получаться соответствующей перестановкой переменных.

Система уравнений вида $\Lambda_i = 0, i = 1 \dots, m$ носит название системы уравнений Бете и в данном случае принимает вид:

$$\prod_{j \neq i} \frac{\text{sh}(v_i - v_j + \eta)}{\text{sh}(v_i - v_j - \eta)} = - \left(\frac{\text{sh}(v_i)}{\text{sh}(\eta - v_i)} \right)^N.$$

6.5 Уравнения Бете в термодинамическом пределе

Будем рассматривать предел в секторе $c < a + b$. В этом случае элементы R -матрицы параметризуются тригонометрическими функциями и уравнения Бете принимают вид:

$$\left(\frac{\sin(v_i)}{\sin(\eta - v_i)} \right)^N = \prod_{j \neq i} \frac{\sin(v_i - v_j + \eta)}{\sin(v_i - v_j - \eta)}$$

По соображениям координатного анзаца Бете делаются предположения:

1. В основном состоянии $|z_i| = |b(v_i)/a(v_i)| = 1$ из чего следует $v_i = \eta/2 + iu_i$.
2. В основном состоянии u_i сгущаются в термодинамическом пределе, образуя непрерывные зоны без дырок и изолированных значений.
3. В основном состоянии в термодинамическом пределе $S^z/N \rightarrow 0$.

Прологарифмируем уравнения Бете

$$Np(u_i) = 2\pi I_i + \sum_j \theta(u_i - u_j),$$

где

$$e^{ip(u)} = \frac{\sin(\eta/2 + iu)}{\sin(\eta/2 - iu)}, \quad e^{i\theta(u)} = \frac{\sin(\eta + iu)}{\sin(\eta - iu)}.$$

Замечание 11 Далее делается допущение, что $I_i = i$.

В основном состоянии имеем:

$$p(u_{i+1}) - p(u_i) = \frac{2\pi}{N} + \frac{1}{N} \sum_j (\theta(u_{i+1} - u_j) - \theta(u_i - u_j)).$$

В пределе $N \rightarrow \infty$ получим

$$p'(u) = 2\pi\rho(u) + \int_{-u_F}^{u_F} dw\theta'(u-w)\rho(w),$$

где $\rho(u) = \lim_{N \rightarrow \infty} (N(u_{i+1} - u_i))^{-1}$ - плотность корней в окрестности точки u . Данное уравнение легко решить, применив преобразование Фурье. Положим

$$\rho(u) = \int dk \rho_k e^{iku}, \quad p'(u) = \int dk p_k e^{iku}, \quad \theta'(u) = \int dk \theta_k e^{iku}.$$

Тогда

$$\rho_k = p_k/2\pi - \theta_k \rho_k,$$

или

$$\rho_k = \frac{1}{4\pi \operatorname{ch}(\frac{1}{2}\eta k)}.$$

Свободная энергия вычисляется по формуле Также пользуясь преобразованием Фу-

$$\log \kappa(u) \equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{\log \Lambda(u)}{N} = \max \left(\log a(u) + \int_{-v_F}^{v_F} dv \rho(v) \log \frac{a(iv - u + \lambda/2)}{b(iv - u + \lambda/2)}, \right. \\ \left. \log b(u) + \int_{-v_F}^{v_F} dv \rho(v) \log \frac{a(u - iv - \lambda/2)}{b(u - iv - \lambda/2)} \right)$$

рье для конволюции можно вычислить значение для свободной энергии:

$$\log \kappa(u) = \log a(u) + \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\operatorname{sh} uk \operatorname{sh} \frac{\pi-\lambda}{2}k}{2k \operatorname{sh} \frac{\pi}{2}k \operatorname{ch} \frac{\lambda}{2}k} \\ = \log b(u) + \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{\operatorname{sh}(\lambda - u)k \operatorname{sh} \frac{\pi-\lambda}{2}k}{2k \operatorname{sh} \frac{\pi}{2}k \operatorname{ch} \frac{\lambda}{2}k}.$$

7 Лекция 6

Основные материалы для лекции [5], [6], [7].

7.1 Инвариант ленточных графов Тураева-Решетихина

В основе конструкции лежит понятие раскраски ленточного графа следующим образом: ленты графа раскрашиваются модулями над квазитреугольной алгеброй Хопфа H , а вершины сплетающими операторами между входящими модулями. Категория H -раскрашенных ленточных графов оказывается компактной сплетенной точной моноидальной категорией. При выполнении дополнительных условий типа Маркова может быть построен функтор из категории H -раскрашенных ленточных графов в категорию H -модулей. Для $H = U_q(SL_2)$ этот функтор обобщает конструкцию полинома Джонса зацепления.

Введем сначала понятие, близкое к представлениям универсальной R -матрицы.

Определение 22 $\sigma = (\{V_i\}, \{R^{V_i V_j}\})$ - совокупность векторных пространств V_i и эндоморфизмов $R^{V_i V_j} : V_i \otimes V_j \rightarrow V_i \otimes V_j$ называется симметрией, если выполняются соотношения Янга-Бакстера

$$R^{V_i V_j} R^{V_i V_k} R^{V_j V_k} = R^{V_j V_k} R^{V_i V_k} R^{V_i V_j}$$

Будем рассматривать подкатегорию, порожденную симметрией в категории $Vect$ - векторных пространств.

Определение 23 Будем называть симметрию невырожденной, если все матрицы $R^{V_i V_j}$ и $(R^{V_i V_j})^{t_1}$ невырождены (здесь под t_1 понимается транспонирование по первой тензорной компоненте). Будем называть симметрию замкнутой, если вместе с каждым пространством V она содержит двойственное пространство V^* .

Замечание 12 Заметим, что любая невырожденная симметрия может быть расширена до замкнутой, если определить операторы на двойственных пространствах по формулам:

$$R^{V_i^* V_j} = \left((R^{V_i V_j})^{-1} \right)^{t_1}, \quad R^{V_i V_j^*} = \left((R^{V_i V_j})^{t_2} \right)^{-1},$$

$$R^{V_i^* V_j^*} = (R^{V_i V_j})^{t_1 t_2}.$$

Будем различать ленточные графы как поверхности и как графы с циклическим порядком ребер в вершинах.

Лентой \mathbb{R}^3 называется образ квадрата $[0, 1] \times [0, 1]$ при вложении в \mathbb{R}^3 . Образы отрезков $0 \times [0, 1]$ и $1 \times [0, 1]$ называются ее основаниями, а линия $[0, 1] \times 1/2$ осью ленты. Кольцом в \mathbb{R}^3 называется образ цилиндра $S^1 \times [0, 1]$, его осью - образ окружности $S^1 \times 1/2$. Рассматриваются ориентированные ленты и кольца. Они называются направленными, если на их оси выбрано направление. В этом случае основание, к которому направлена ось называется конечным, а второе - начальным.

Определение 24 Однородной (k, l) -ленточной связкой называется конечное семейство попарно непересекающихся направленных ориентированных лент и колец, лежащих в $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ и пересекающихся с плоскостями $\mathbb{R}^2 \times 0$ и $\mathbb{R}^2 \times 1$ по основаниям лент, состоящим из набора отрезков $[2i - 1, 2i] \times 0 \times 0$ и $[2j - 1, 2j] \times 0 \times 1$ для $i = 1, \dots, k, j = 1, \dots, l$. Кроме этого требуется, чтобы вблизи основания ленты были обращены белыми сторонами вверх.

Замечание 13 С каждой ленточной связкой t ассоциируется набор знаков $\epsilon(t) = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_k), \nu(t) = (\nu_1, \dots, \nu_l)$, которые определяются следующим образом: если начальное основание лежит на листе $\mathbb{R}^2 \times 0$ или конечное основание лежит на листе $\mathbb{R}^2 \times 1$ то его знак $+$, в противном случае $-$. Также может быть определен коэффициент кручения каждой ленты, как коэффициент зацепления левого края ленты за правый.

Определение 25 Категорией ленточных связок \mathcal{OT}' называется категория, объектами которой являются конечные последовательности $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_k), \epsilon_i = \pm$. Морфизмами категории называются ленточные связки $t : \epsilon \rightarrow \nu$. Пустая последовательность является тождественным объектом в смысле моноидальной категории, тождественным морфизмом $\epsilon \rightarrow \epsilon$ называется связка без колец, состоящая из незаузленных, незацепленных лент с нулевыми коэффициентами кручения.

Замечание 14 Определим также категорию крашенных ленточных связок $\mathcal{OT}'(\mathcal{X})$, объектами которой являются наборы $((X_1, \epsilon_1), \dots, (X_k, \epsilon_k))$, $X_i \in \mathcal{X}$. Морфизмами будут крашенные ленточные связки, каждая лента и кольца которых раскрашены одним цветом из множества \mathcal{X} .

Теорема 10 (Решетихин 93) Морфизмы категории $\mathcal{OT}'(\mathcal{X})$ порождены набором на рисунке 10 в смысле операций в моноидальной категории. Соотношения на эти генераторы представлены на рисунке 11

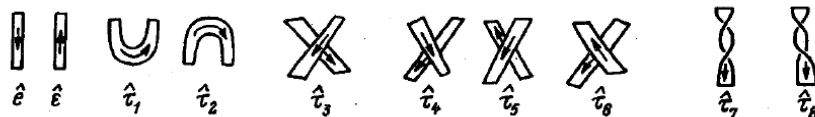


Рис. 10: Генераторы

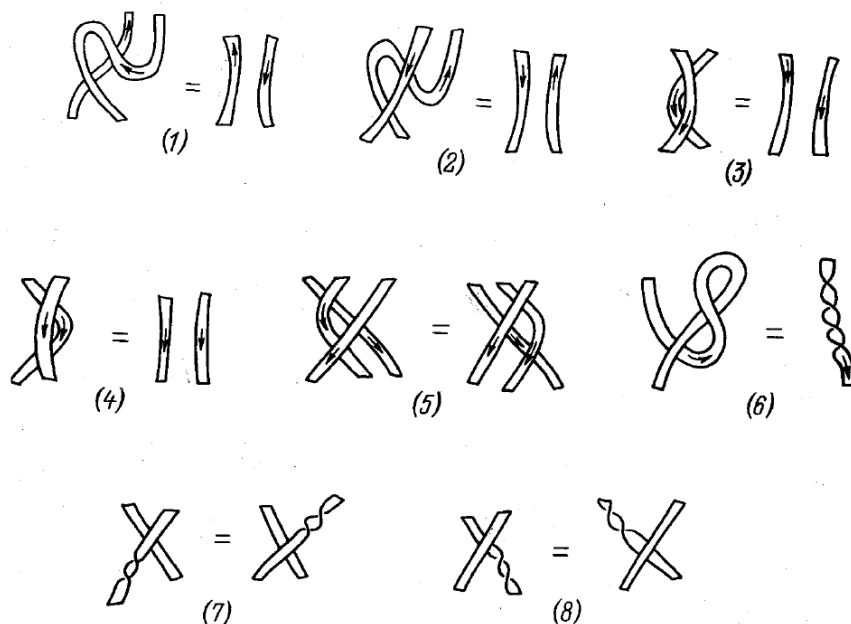


Рис. 11: Соотношения

Сделаем еще одно важное вспомогательное построение. Рассмотрим матрицу:

$$w_V = \text{tr}_2 \text{tr}_3 \left(R_{12}^{VV} P_{23} \left((R_{23}^{V^*V})^{-1} \right)^{t_2} \right)$$

и главный квадратный корень из нее $v = w^{1/2}$. Тогда верна следующая теорема:

Теорема 11 *Отображение*

$$G : \mathcal{OT}'(\mathcal{X}) \rightarrow \text{Vect}$$

которое действует на объектах, переводя набор $((X_1, \epsilon_1), \dots, (X_k, \epsilon_k))$ в векторное пространство $X_1^{\epsilon_1} \otimes \dots \otimes X_k^{\epsilon_k}$, действует на морфизмах по формулам:

$$\begin{aligned} G(\tau_1) &= \alpha, & \alpha : X^* \otimes X &\rightarrow \mathbb{C}, & f \otimes x &\mapsto (f, x), \\ G(\tau_2) &= \beta, & \beta : \mathbb{C} &\rightarrow X \otimes X^*, & 1 &\mapsto e_i \otimes e^i, \\ G(\tau_3) &= P^{XY} R^{XY}, & G(\tau_4) &= (R^{XY})^{-1} P^{XY}, & G(\tau_5) &= P^{XY*} R^{XY*}, \\ G(\tau_6) &= (R^{Y*X})^{-1} P^{XY*}, & G(\tau_7) &= v_X, & G(\tau_8) &= v_X^{-1}, \end{aligned}$$

для которого, кроме того, верно:

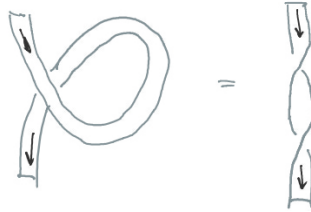
$$G(t \otimes t') = G(t) \otimes G(t')$$

является функтором из категории $\mathcal{OT}'(\mathcal{X})$ в категорию $Vect$.

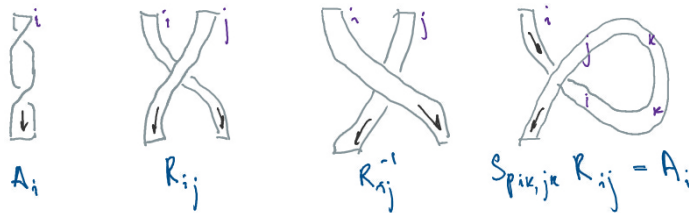
Замечание 15 Данный функтор является изотопическим инвариантом, так как сами связки определяются с точностью до изотопии. Следовательно, для $(0, 0)$ -связок, то есть для ленточных узлов, данная конструкция предоставляет инвариант узла.

7.2 Квадратный корень конструкции

Будем доказывать корректность конструкции для категории с более простой системой соотношений на образующие, в частности, будет разрешено расплетать одну петлю, как в 1-м движении Рейдемейстера, при этом зарабатывая нетривиальное закручивание. Мы заменили движение 6 на его “квадратный корень” Это соответствует



движению на рисунке:



Доказательство функториальности для движений 1-5 вполне очевидно, они обеспечиваются уравнением Янга-Бакстера и способом выбора оператора в двойной точке в зависимости от ориентаций. Новый аналог движения 6 является определением функтора на операции закручивания. Докажем первое нетривиальное соотношение для функтора,

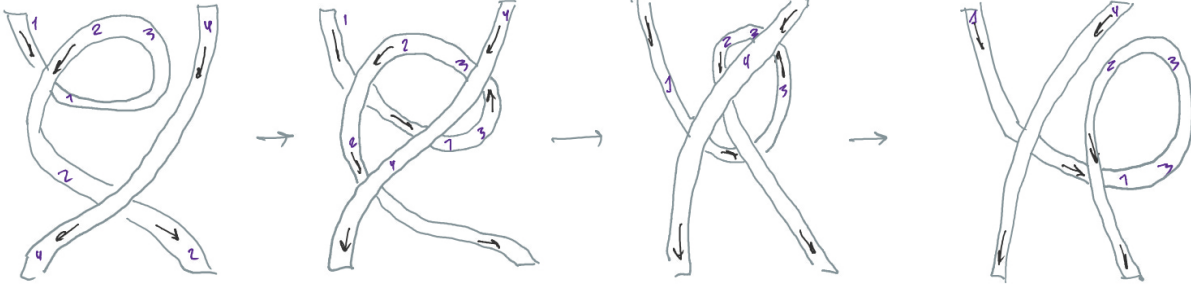
Для этого рассмотрим последовательность преобразований:

Алгебраически эта последовательность соответствует выражению

$$\begin{aligned} Sp_{13,23} R_{24} R_{12} &= Sp_{13,23} R_{24} R_{14} R_{34}^{-1} R_{12} = Sp_{13,23} R_{24} R_{14} R_{12} R_{34}^{-1} \\ &= Sp_{13,23} R_{12} R_{14} R_{24} R_{34}^{-1} = Sp_{13,23} R_{12} R_{14}. \end{aligned}$$



$$[R, A \otimes 1] = 0$$



7.3 Альтернативная конструкция

В этой части для нас будут важны свойства квази-треугольной алгебры Хопфа A . Напомним, что эта структура прежде всего связана с R -матрицей

$$R = \sum_i \alpha_i \otimes \beta_i,$$

которая решает уравнение Янга-Бакстера

$$R_{12}R_{13}R_{23} = R_{23}R_{13}R_{12},$$

кроме того, верно

$$(\Delta \otimes 1)R = R_{13}R_{23}.$$

Но теперь для нас будет важна также структура антипода. В частности, верно:

$$\begin{aligned} (\epsilon \otimes id)R &= (id \otimes \epsilon)R = 1, \\ (s \otimes id)R &= (id \otimes s^{-1})R = R^{-1} \\ (s \otimes s)R &= R \end{aligned}$$

Кроме этого, введем элемент

$$u = \sum s(\beta_i)\alpha_i.$$

Этот элемент удовлетворяет следующим соотношениям

$$\begin{aligned} s^2(a) &= uau^{-1} \quad \forall a \in A \\ us(u) &\in Z(A) \\ \Delta(u) &= (R_{21}R_{12})^{-1}(u \otimes u) = (u \otimes u)(R_{21}R_{12})^{-1} \end{aligned}$$

Чуть более общее понятие вводится следующим определением:

Определение 26 *Ленточной алгеброй Хопфа называется набор (A, R, v) такой что (A, R) - квазитреугольная алгебра Хопфа, $v \in Z(A)$ такой центральный элемент, что выполняется*

$$v^2 = us(u), \quad s(v) = v, \quad \epsilon(v) = 1, \quad \Delta(v) = (R_{21}R_{12})^{-1}.$$

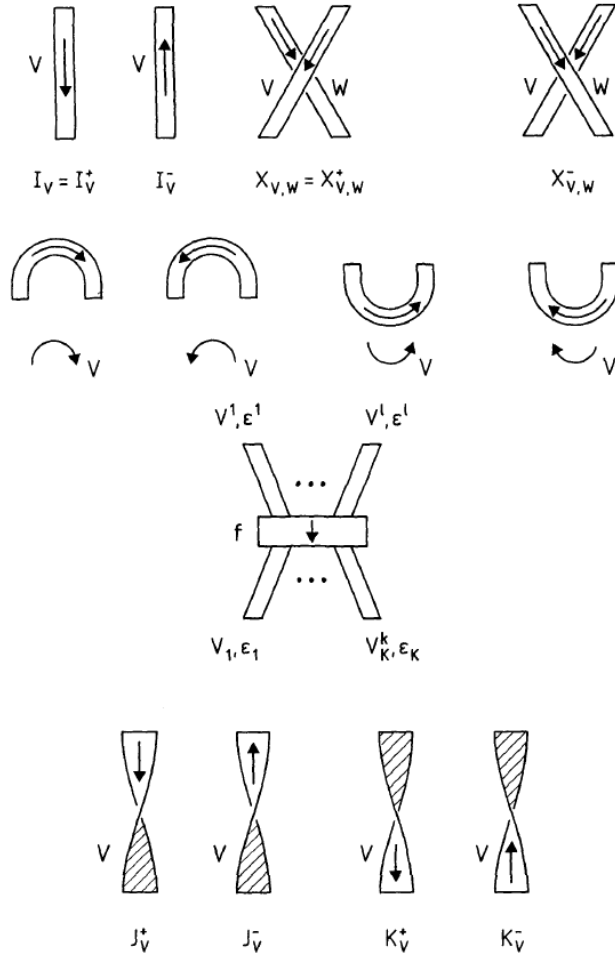


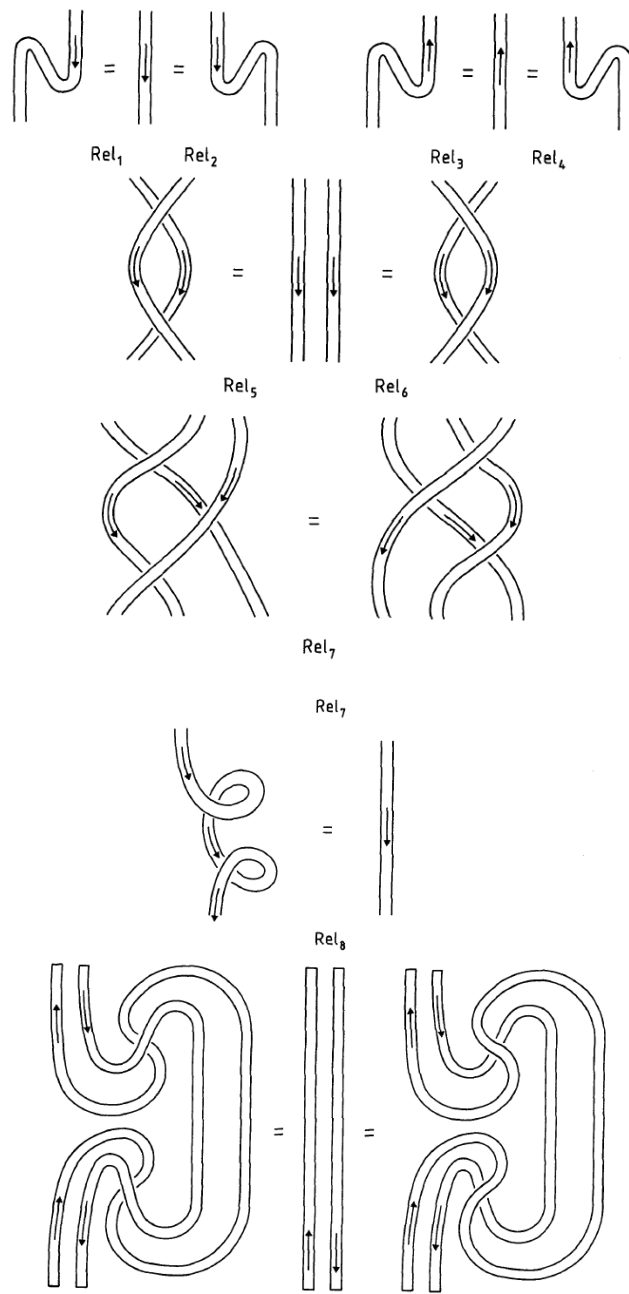
Рис. 12: Генераторы категории

Рассмотрим следующие обозначения для генераторов в категории ленточных связок:

В категории ленточных связок данные генераторы удовлетворяют следующим соотношениям:

Теорема 12 *Существует единственный ковариантный функтор F из категории однородных крашенных ленточных связок в категорию представлений ленточной алгебры Хопфа (A, R, v) , определяемый следующими свойствами*

1. F - сохраняет тензорное произведение;
2. для любого конечномерного A -модуля V функтор переводит объект (V, ϵ) в V^ϵ , где $V^1 = V$, а $V^{-1} = V^*$.



3. F переводит генераторы морфизмов категории $\mathcal{12}$ переводятся

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 V \\
 \downarrow \\
 \text{---} \\
 \uparrow \\
 V^*
 \end{array}
 \end{array} \\
 \text{---} \\
 \begin{array}{c}
 \downarrow \\
 V^*
 \end{array}
 \end{array} \\
 \text{---} \\
 \begin{array}{c}
 \downarrow \\
 V
 \end{array}
 \end{array} \\
 \text{---} \\
 \begin{array}{c}
 \downarrow \\
 V^*
 \end{array}
 \end{array} \\
 \text{---} \\
 \begin{array}{c}
 \downarrow \\
 V
 \end{array}
 \end{array} \\
 \text{---} \\
 \begin{array}{c}
 \downarrow \\
 V^*
 \end{array}
 \end{array} \\
 \text{---} \\
 \begin{array}{c}
 \downarrow \\
 V
 \end{array}
 \end{array} \\
 X_{V,W}
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 (x, y) \mapsto y(x) : V \otimes V^* \rightarrow k \\
 (y, x) \mapsto y(v^{-1}ux) : V^* \otimes V \rightarrow k \\
 x \otimes y \mapsto \sum_i \beta_i y \otimes \alpha_i x : V \otimes W \rightarrow W \otimes V
 \end{array}$$

В последнем равенстве

$$R = \sum_i \alpha_i \otimes \beta_i$$

Доказательство

В первую очередь рассмотрим соотношения 1 и 2. Из них однозначно восстанавливается значение функтора на морфизмах Действительно, пусть первому соответ-

$$\downarrow \curvearrowright \downarrow, \downarrow \curvearrowleft \downarrow^*$$

ствует выражение

$$1 \rightarrow \sum_{i,j} f_i^j e^i \otimes e_j$$

Движению 2 этом случае должно соответствовать выражение:

$$e_k \rightarrow e_k \otimes f_i^j e^i \otimes e_j \rightarrow f_i^j e^i(e_k) e_j = f_k^j e_j = e_k.$$

Из этого следует, что $f_i^j = \delta_{ij}$. Аналогично доказывается, что морфизму соответствует линейный оператор

$$\downarrow \curvearrowright \downarrow$$

$$1 \rightarrow u^{-1} v e_i \otimes e^i.$$

Для доказательства инвариантности функтора по отношению к 1-му движению Рейдемейстера приведем здесь один сюжет, имеющий отношение к структурной теории квантовых групп. Он касается построения центра квантовых групп, в основном мы будем использовать работу [8].

Нам потребуется несколько соотношений, выполняющихся в квазитреугольных алгебрах Хопфа:

Лемма 6 Пусть $b \in A \otimes A$ такой, что $\forall a \in A, [\Delta(a), b] = 0$. Пусть кроме того $\lambda \in A^*$ функционал, удовлетворяющий условию

$$\lambda(xy) = \lambda(yS^2(x)).$$

Тогда

$$(id \otimes \lambda)(b) \in Z(A).$$

Нам надо доказать, что

$$x(id \otimes \lambda)(b) = (id \otimes \lambda)(b)x.$$

Это эквивалентно следующему:

$$(id \otimes \lambda)(x \otimes 1b) = (id \otimes \lambda)(x \otimes 1b).$$

Сделаем несколько промежуточных вычислений: пусть $\Delta x = \sum_i y_i \otimes z_i$. Тогда

$$\sum_i \Delta(y_i) \otimes z_i = \sum_i y_i \otimes \Delta(z_i) = (\Delta \otimes id)\Delta x = (id \otimes \Delta)\Delta x.$$

Применим к обеим частям равенства операцию $(1 \otimes m)(1 \otimes 1 \otimes S)$. Согласно свойству антипода получим:

$$\sum_i \Delta(y_i)(1 \otimes S(z_i)) = \sum_i y_i \otimes \epsilon(z_i)1 = x \otimes 1.$$

Аналогично найдем выражение для Δ^{op} .

$$\begin{aligned} 1 \otimes x &= (S^{-1}(z_i) \otimes 1)\Delta^{op}y_i = (m \otimes 1)(S^{-1} \otimes 1 \otimes 1)(z_i \otimes \Delta^{op}y_i) \\ &= (m \otimes 1)(S^{-1} \otimes 1 \otimes 1)(\Delta^{op}z_i \otimes y_i) = 1 \otimes \epsilon(S^{-1}z_i)y_i = 1 \otimes x. \end{aligned}$$

Последнее равенство эквивалентно:

$$x \otimes 1 = (1 \otimes S^{-1}(z_i))\Delta y_i.$$

При выводе мы использовали несколько тождеств для $a = S(b)$:

$$\begin{aligned} \Delta^{op}S(b) &= (S \otimes S)\Delta(b) \\ m(S^{-1} \otimes 1)\Delta^{op}a &= m(S^{-1} \times 1)\Delta^{op}S(b) = m(S^{-1} \otimes 1)(S \otimes S)\Delta b \\ &= m(1 \otimes S\Delta b) = \epsilon(S^{-1}a)1. \\ SS^{-1}\epsilon(S^{-1}z_i)y_i &= SS^{-1}(y_i\epsilon(S^{-1}z_i)) = S(S^{-1}(y_i)\epsilon(S^{-1}z_i)) \\ &= S(m(\epsilon \otimes 1)(S^{-1}z_i \otimes S^{-1}y_i)) = S(b) = a. \end{aligned}$$

Пользуясь этими результатами, получим:

$$\begin{aligned} (1 \otimes \lambda)((x \otimes 1)b) &= (1 \otimes \lambda)(1 \otimes S^{-1}(z_i)\Delta(y_i)b) = (1 \otimes \lambda)(1 \otimes S^{-1}(z_i)b\Delta(y_i)) \\ &= (1 \otimes \lambda)(b\Delta(y_i)1 \otimes S(z_i)) = (1 \otimes \lambda)(b(x \otimes 1)). \end{aligned}$$

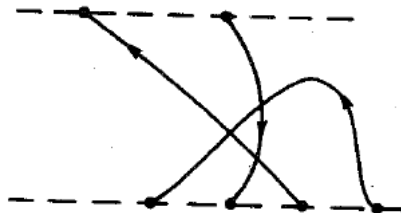
7.4 Инвариант связок

Определение 27 Связкой называется класс изотопий ориентированных 1-подмногообразий $t \subset \mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ такого, что его граница

$$\partial t = \cup_{i=1}^k (i, 0, 0) \cup \cup_{j=1}^l (j, 0, 1) \subset \mathbb{R}^2 \times 0 \cup \mathbb{R}^2 \times 1$$

кроме того, требуется, чтобы t пересекало трансверсально $\mathbb{R}^2 \times 0 \cup \mathbb{R}^2 \times 1$. Для каждого такого объекта будем фиксировать набор знаков вхождения касательного вектора в граничную точку.

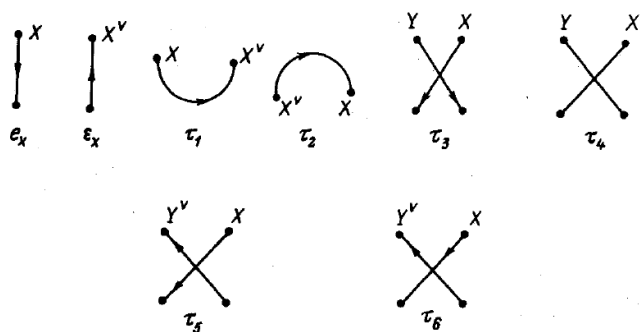
Замечание 16 В отличие от кос здесь допускаются линии, которые соединяют точки только на верхнем или нижнем листе, как например на рисунке ниже:



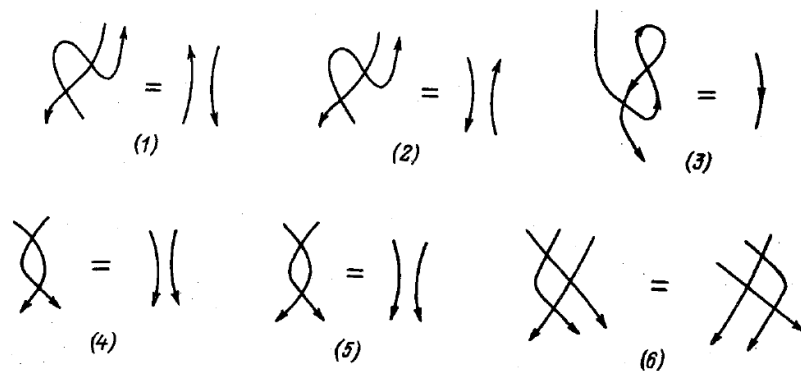
Определение 28 Категорией ориентированных связок \mathcal{OT} называется категория, объектами которой являются произвольные конечные последовательности знаков $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$, а морфизмами объекта ϵ в объект ϵ' являются связки с основанием ϵ и вершиной ϵ' . Тожественным морфизмом \mathcal{OT} называется незаузленная незацепленная связка, тождественным объектом в смысле моноидальной категории называется пустое множество.

Замечание 17 Действительно на данной категории может быть введена очевидная структура моноидальной категории по правилу: $\epsilon \otimes \nu = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_k, \nu_1, \dots, \nu_l)$, а связка $t \otimes t'$ получается путем приписывания связки t' справа от t .

Также как в случае ленточных связок, морфизмы данной категории могут быть заданы с помощью генераторов



и соотношений



Как и в случае ленточных связок имеет место морфизм из категории ориентированных связок в категорию векторных пространств. Он задается теоремой:

Теорема 13 *Отображение F , определенное на объектах, как*

$$F((X_1, \epsilon_1), \dots, (X_n, \epsilon_n)) = X_1^{\epsilon_1} \otimes \dots \otimes X_n^{\epsilon_n}$$

а на морфизмах задаваемое соотношениями:

$$\begin{aligned}
F(e_X) &= I_X \\
F(\epsilon_X) &= I_{X^*} \\
F(\tau_1) &= \alpha_X, \quad \alpha_X : X^* \otimes X \rightarrow \mathbb{C}, f \otimes x \mapsto (f, g), \\
F(\tau_2) &= \beta_X, \quad \beta_X : \mathbb{C} \rightarrow X \otimes X^*, 1 \mapsto e_i \otimes e^i, \\
F(\tau_3) &= P^{XY} R^{XY} (\nu_X^{-1} \otimes 1), \quad F(\tau_4) = (R^{YX})^{-1} P^{XY} (1 \otimes \nu_Y), \\
F(\tau_5) &= P^{XY^*} R^{XY^*} (\nu_X^{-1} \otimes 1), \quad F(\tau_6) = (R^{Y^*X})^{-1} P^{XY^*} (1 \otimes \nu_{Y^*}), \\
F(t \otimes t') &= F(t) \otimes F(t'),
\end{aligned}$$

является функтором рассматриваемых категорий.

7.5 Пример для $U_h(\mathfrak{sl}_2)$

Цель этого параграфа в специализации конструкции на случай R -матрицы для серии A . Утверждается, что в этом случае инвариант зацепления совпадает с инвариантом Джонса-Конвея. В частности, согласно разделу 6 [5] при выборе 2-мерного представления $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ полученный инвариант совпадает буквально с полиномом Джонса по переменной $q = \exp(h/2)$.

Еще раз напомним описание неприводимых конечномерных представлений V^j $U_h(\mathfrak{sl}_2)$. Они параметризуются полуцелыми числами $j = 0, 1/2, 1, 3/2, \dots$. При этом размерность $\dim V^j = 2j + 1$. В каноническом базисе $\{e_m^j\}$ где $m = -j, \dots, j$ действие генераторов представляется формулами:

$$\begin{aligned}
\rho^j(X^\pm) e_m^j &= ([j \mp m]_q [j \pm m + 1]_q)^{1/2} e_{m\pm 1}^j, \\
\rho^j(H) e_m^j &= 2m e_m^j.
\end{aligned}$$

Общая формула для универсальной R -матрицы такова:

$$R = \exp\left(\frac{h}{4} H \times H\right) \sum_{i \geq 0} \frac{(1 - e^{-h})^i}{[i]_q} \exp\left(i \frac{h}{4} (H \otimes 1 - 1 \otimes H)\right) (X^+)^i \otimes (X^-)^i.$$

Она специализируется в представлении $j = 1/2$ следующим образом:

$$R = \exp\left(\frac{h}{4} H \times H\right) \left(1 + (1 - e^{-h}) \exp\left(\frac{h}{4} (H \otimes 1 - 1 \otimes H)\right) X^+ \otimes X^-\right).$$

Вычислим основные соотношения в данном представлении, напомним, что базисом в нем является набор $\{e_{1/2}, e_{-1/2}\}$:

$$\begin{aligned}
\exp\left(\frac{h}{4} H \times H\right) e_{1/2} \otimes e_{1/2} &= q^{1/2} e_{1/2} \otimes e_{1/2} \\
\exp\left(\frac{h}{4} H \times H\right) e_{1/2} \otimes e_{-1/2} &= q^{-1/2} e_{-1/2} \otimes e_{1/2} \\
\exp\left(\frac{h}{4} H \times H\right) e_{-1/2} \otimes e_{1/2} &= q^{-1/2} e_{-1/2} \otimes e_{1/2} \\
\exp\left(\frac{h}{4} H \times H\right) e_{-1/2} \otimes e_{-1/2} &= q^{1/2} e_{-1/2} \otimes e_{-1/2}
\end{aligned}$$

Выпишем также единственный член с нетривиальным действием повышающих и понижающих операторов

$$Re_{-1/2} \otimes e_{1/2} = e^{-h/4} e_{-1/2} \otimes e_{1/2} + (1 - q^{-2}) e^{-h/4} e^{h/2} e_{1/2} \otimes e_{-1/2}$$

Эти формулы записываются в виде матрицы

$$R = \begin{pmatrix} q^{1/2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & q^{-1/2} & q^{1/2} - q^{-3/2} & 0 \\ 0 & 0 & q^{-1/2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q^{1/2} \end{pmatrix}$$

Для удобства домножим ее на $q^{1/2}$, получим матрицу

$$S = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & q - q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$$

После умножения на матрицу перестановки получим

$$\tilde{R} = P_{12} S_{12} = \begin{pmatrix} q & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & q - q^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & q \end{pmatrix}$$

Рассмотрим также выражения для операторов, связанных с квадратом антипода. В данном случае

$$v = u \exp(-h/2H).$$

Элементу $u^{-1}v$ соответствует оператор в представлении:

$$A = \rho_{1/2}(\exp(-h/2H)) = \begin{pmatrix} q & 0 \\ 0 & q^{-1} \end{pmatrix}.$$

Связкам



соответствуют выражения:

$$\begin{aligned} tr_2 R(1 \otimes A) &= q^2 Id \\ tr_1 (A^{-1} \otimes 1) R &= q^2 Id \end{aligned}$$

соответственно. Это наблюдение позволяет путем перенормировки R -матрицы построить инвариант обычных связок.

Предложение 5 *Инвариант зацеплений, строящийся в соответствии с кон- струкцией Тураева-Решетихина и R-матрицей, задаваемой формулой $q^2\tilde{R}$, совпа- дает с полиномом Джонса.*

Доказательство состоит в том, что этот инвариант для тривиального узла равен 1 и то, что для него выполняются скейн соотношения. Докажем последнее. Верно следующее:

$$\tilde{R} - \tilde{R}^{-1} = (q - q^{-1})Id$$

Из этого следует: Теперь, если перенормировать матрицу на q^2 , то получим соотно-

$$\chi\left(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}\right) - \chi\left(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}\right) = (q - q^{-1})\chi\left(\begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array}\right)$$

шение

$$q^{-2}\chi(L_+) - q^2\chi(L_-) = (q - q^{-1})\chi(L_0).$$

Это соотношение заканчивает доказательство.

8 Лекция 7

8.1 Алгебры Гекке и Темперли-Либа

Определение 29 *Алгеброй Темперли-Либа $TL(n, \tau)$ для $\tau \in \mathbb{C}$ называется ассоци- ативная алгебра с единицей, с генераторами e_1, e_2, \dots, e_{n-1} и соотношениями:*

$$\begin{aligned} e_i^2 &= e_i \\ e_i e_{i\pm 1} e_i &= \tau e_i \\ e_j e_j &= e_j e_i \quad \text{если } |i - j| \geq 2 \end{aligned}$$

Определение 30 *Следом Маркова на $T(n, \tau)$ называется линейное отображение $tr : TL(n, \tau) \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяющее условиям:*

1. $tr(1) = 1$
2. $tr(ab) = tr(ba)$
3. $tr(xe_{n-1}) = \tau tr(x)$ для $x \in TL(n-1, \tau)$

Имеет место гомоморфизм ρ_n из групповой алгебры B_n в алгебру Темперли-Либа:

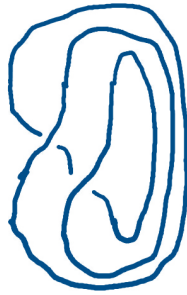
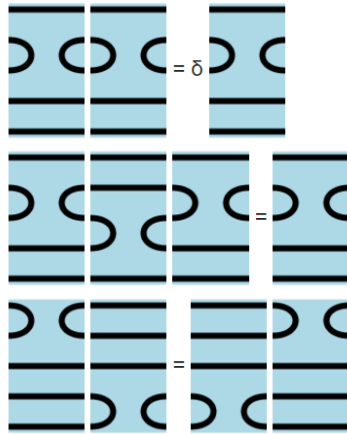
$$\rho_n(\sigma_i) = A^{-1}e_i + A.$$

Элементы A_n можно представить классами изотопий набора непересекающихся кри- вых на квадрате, имеющие концы в фиксированных точках на двух противополож- ных ребрах квадрата (в отличие от кос, кривые могут соединять точки на одной и той же стороне квадрата) с точностью до добавления/удаления окружности. Гене- раторы A_n можно представить наборами кривых на рисунке: Тожества в алгебре Темперли-Либа представляются следующими схемами:

В такой интерпретации описанный выше гомоморфизм переводит замкнутую косу в линейную комбинацию замыканий картинок

$$u: \quad \downarrow$$

$$| \dots | \cup | \dots | \quad | \dots | \downarrow | \quad (| \dots |)$$



9 Лекция 8. Уравнение тетраэдров

Впервые уравнение тетраэдров возникло в работе А. Замолодчикова [1981] [9]. Оно имеет несколько версий, как и уравнение Янга-Бакстера. Начнем с векторной: пусть $\Phi \in \text{End}(V^{\otimes 3})$, где V - конечномерное векторное пространство. Тогда собственно уравнение приобретает вид

$$\Phi_{123} \Phi_{145} \Phi_{246} \Phi_{356} = \Phi_{356} \Phi_{246} \Phi_{145} \Phi_{123}$$

в котором обе части равенства - операторы в $V^{\otimes 6}$ и Φ_{ijk} представляет оператор, действующий в тензорных компонентах i, j, k как Φ и тривиально в остальных.

Аналогично вводится теоретико-множественная версия уравнения. Пусть X конечное множество. Скажем, что отображение

$$X \times X \times X \xrightarrow{R} X \times X \times X,$$

удовлетворяет теоретико-множественному уравнению тетраэдров, если

$$R_{123} \circ R_{145} \circ R_{246} \circ R_{356} = R_{356} \circ R_{246} \circ R_{145} \circ R_{123}$$

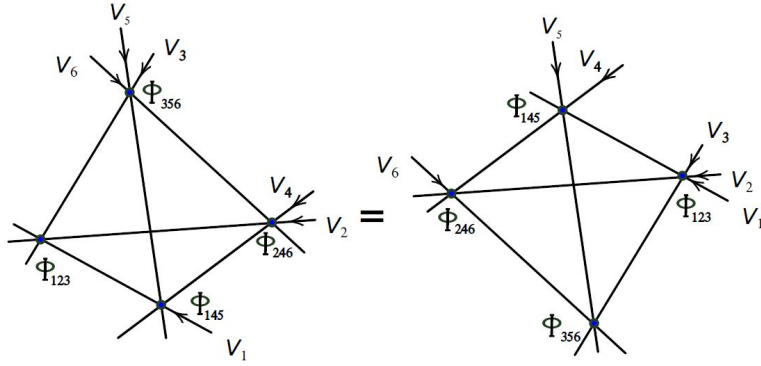


Рис. 13: Уравнение тетраэдров

где обе части равенства - отображения декартовой степени $X^{\times 6}$ и нижние индексы соответствуют номерам декартовых множителей X .

Введем обозначение

$$R(x, y, z) = (R_1(x, y, z), R_2(x, y, z), R_3(x, y, z)) = (x', y', z').$$

тогда, например,

$$\begin{aligned} R_{356}(a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6) &= (a_1, a_2, R_1(a_3, a_5, a_6), a_4, R_2(a_3, a_5, a_6), R_3(a_3, a_5, a_6)) \\ &= (a_1, a_2, a'_3, a_4, a'_5, a'_6), \end{aligned}$$

9.1 Физическая интерпретация

В работе [9] уравнение тетраэдров возникло в попытке обобщить явление интегрируемости статистических моделей в смысле факторизуемости S -матрицы и включения трансформатрицы в “большое” коммутативное семейство. Собственно уравнение тетраэдров выступило в роли алгебраического условия интегрируемости. Кроме этого было построено явное решение статического уравнения тетраэдров (без спектрального параметра?), для которого было построенное коммутативное семейство.

9.2 Примеры решений

Также говорят о решениях функционального уравнения тетраэдров, если имеется отображение

$$\Phi : Fun(X)^{\otimes 3} \rightarrow Fun(X)^{\otimes 3}$$

где $Fun(X)$ - некоторое пространство функций на множестве X (например, пространство рациональных функций на \mathbb{C}), удовлетворяющее векторному уравнению тетраэдров. Одним из известных решений функционального уравнения тетраэдров является так называемое электрическое решение

$$\begin{aligned} \Phi(x, y, z) &= (x_1, y_1, z_1); \\ x_1 &= \frac{xy}{x + z + xyz}, \\ y_1 &= x + z + xyz, \\ z_1 &= \frac{yz}{x + z + xyz}, \end{aligned}$$

являющееся оператором на пространстве рациональных функций трех переменных x, y, z .

Это преобразование эквивалентно преобразованию “звезда-треугольник” в электрических цепях

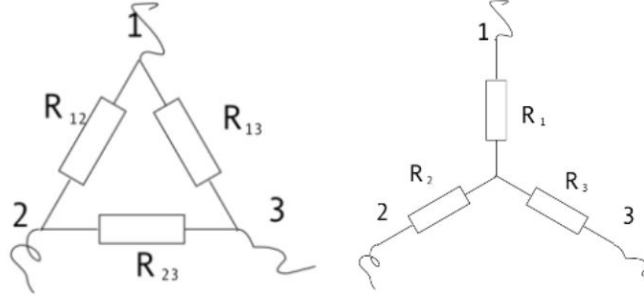


Рис. 14: Преобразование “Звезда-треугольник”

В котором сопротивления связаны соотношениями:

$$\frac{1}{R_{ij}} = \frac{1}{R_i R_j} / \sum_k \frac{1}{R_k}.$$

Они эквивалентны следующим:

$$\begin{aligned} R_{12} &= (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) / R_3 \\ R_{13} &= (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) / R_2 \\ R_{23} &= (R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3) / R_1 \end{aligned}$$

Обратная связь представляется формулами:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{R_{12} R_{13}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} \\ R_2 &= \frac{R_{12} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} \\ R_3 &= \frac{R_{13} R_{23}}{R_{12} + R_{23} + R_{13}} \end{aligned}$$

Связь с электрическим решением дается формулами:

$$\begin{aligned} x_1 &= R_{12}^{-1}, & y_1 &= R_{13}, & z_1 &= R_{23}^{-1}, \\ x &= R_1, & y &= R_2^{-1}, & z &= R_3. \end{aligned}$$

Благодаря такой подстановке преобразование оказывается инволютивным.

Замечание 18 Электрическое решение допускает конечномерные редукции.

Рассмотрим кольцо вычетов $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$, где p либо простое число вида $p = 4l + 1$, или $p = 2$, и k целое число ≥ 2 . Для таких p , символ Лежандра $\left(\frac{-1}{p}\right) = 1$, то есть существует квадратный корень из -1 в $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Зафиксируем один из таких корней $\varepsilon \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Выберем X в виде подмножества $\mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z}$ вида

$$X = \{x \in \mathbb{Z}/p^k\mathbb{Z} : x = \varepsilon \pmod{p}\}. \quad (10)$$

Лемма 7 Электрическое решение корректно ограничивается на $X \times X \times X$.

Пример 9 Рассмотрим $\mathbb{Z}/25\mathbb{Z}$, и зафиксируем $\varepsilon = 2$. Введем координату n на множестве X так что $x = 2 + 5n$, где $x \in X$ и n принимает значения $n = 0, \dots, 4$,

$$x = 2 + 5n_1, \quad y = 2 + 5n_2, \quad z = 2 + 5n_3. \quad (11)$$

В этих обозначениях электрическое преобразование принимает вид

$$R(n_1, n_2, n_3) = (n_1 + 2n_2 - 2, 2 - n_2, n_3 + 2n_2 - 2). \quad (12)$$

Пример 10 Еще один пример может быть получен при выборе $\mathbb{Z}/2^k\mathbb{Z}$ и его подмножества нечетных элементов X . В случае $k = 3$ это подмножество можно идентифицировать с $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$ посредством отображения $\phi: \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$

$$\phi: n \mapsto 2n + 1. \quad (13)$$

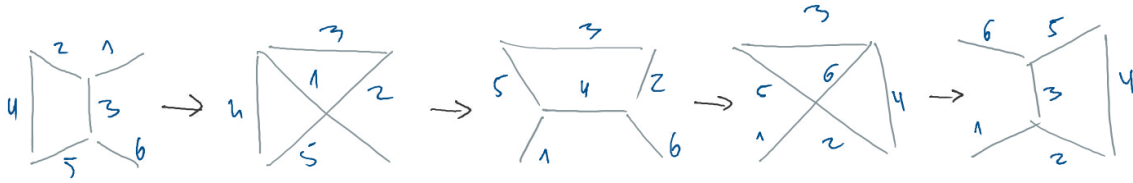
В этой параметризации преобразование записывается в виде

$$n'_1 = n_1 + 1 + 2(n_2 + n_3 + n_1n_2 + n_1n_3 + n_2n_3); \quad (14)$$

$$n'_2 = n_2 + 1 + 2(n_1 + n_3 + n_1n_2 + n_1n_3 + n_2n_3); \quad (15)$$

$$n'_3 = n_3 + 1 + 2(n_1 + n_2 + n_1n_2 + n_1n_3 + n_2n_3). \quad (16)$$

Доказательство уравнения тетраэдров выполняется с помощью картинки



Еще одним примером решения функционального уравнения тетраэдров является преобразование, связанное с введением углов Эйлера. Рассмотрим два разложения элемента $U \in SO(3)$ в произведение

$$U = \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \phi_1 & \sin \phi_1 & 0 \\ -\sin \phi_1 & \cos \phi_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{X_{\alpha\beta}[\phi_1]} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos \phi_2 & 0 & \sin \phi_2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi_2 & 0 & \cos \phi_2 \end{pmatrix}}_{X_{\alpha\gamma}[\phi_2]} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi_3 & \sin \phi_3 \\ 0 & -\sin \phi_3 & \cos \phi_3 \end{pmatrix}}_{X_{\beta\gamma}[\phi_3]}$$

$$U = X_{\alpha\beta}[\phi_1]X_{\alpha\gamma}[\phi_2]X_{\beta\gamma}[\phi_3] = X_{\beta\gamma}[\phi'_3]X_{\alpha\gamma}[\phi'_2]X_{\alpha\beta}[\phi'_1]$$

Тогда преобразование из одной тройки углов в другую представляется формулами

$$\begin{aligned} \sin \phi'_2 &= \sin \phi_2 \cos \phi_1 \cos \phi_1 + \sin \phi_1 \sin \phi_3 \\ \cos \phi'_1 &= \frac{\cos \phi_1 \cos \phi_2}{\cos \phi'_2}, \quad \cos \phi'_3 = \frac{\cos \phi_2 \cos \phi_3}{\cos \phi'_2} \end{aligned}$$

и является решением функционального уравнения тетраэдров

Тот же хорошо бы доказать уравнение тетраэдров

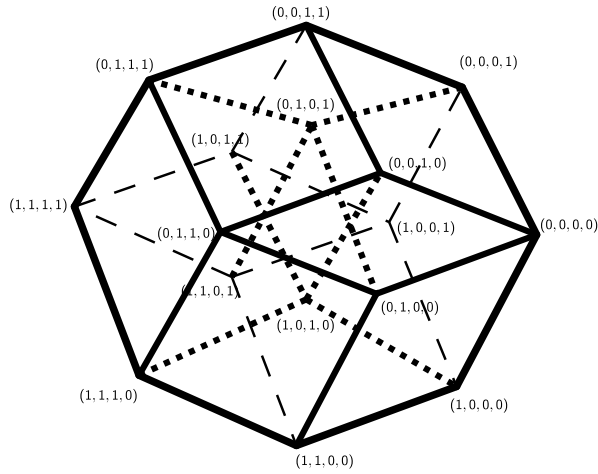


Рис. 15: Тессеракт

Еще одна интерпретация уравнения тетраэдров связана с задачей о раскраске граний куба. Рассмотрим 4-куб и его проекцию на 3-мерное пространство. Эта фигура может быть представлена в виде двух разрезов ромбо-додекаэдра на 4 параллелепипеда, которые соответствуют 3-кубам границы 4-куба.

Пусть $\Phi : X^{\times 3} \rightarrow X^{\times 3}$ некоторое отображение. Рассмотрим задачу раскрасок 2-граней 4-элемента множества X , называемыми цветами, подчиненную Φ , то есть таких раскрасок, что цвета граней каждого 3-куба удовлетворяют $\Phi : (a_1, a_2, a_3) \rightarrow (a'_1, a'_2, a'_3)$. Пока скажем, что имеется способ ввести корректно порядок на гранях, который позволит определить их порядок в рассмотренном равенстве. Оказывается, что условие совместности двух способов продолжения раскраски входящих граней эквивалентно теоретико-множественному уравнению тетраэдров на Φ .

9.3 Тетраэдральный комплекс

Пусть I^N стандартный N -куб, то есть

$$I^N = \underbrace{I \times I \times \cdots \times I}_{N \text{ times}}, \text{ where } I = [0, 1].$$

Обозначим за I_2^N множество его 2-граней. Можно параметризовать I_2^N набором символов $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_N)$ где τ_k принимают 0, 1, *; где * соответствует координате, меняющейся в интервале $[0, 1]$. Из определения следует, что n -мерной грани соответствует последовательность, в которой ровно n звездочек.

Зафиксируем грань τ и обозначим за $\{j_k\}_\tau$ множество индексов в последовательности τ соответствующих местам, на которых располагается знак *. Подгрань размерности 1 грани τ определяется подстановкой числа 0 или 1 вместо одной из звездочек в последовательности. Зафиксируем индекс j_k соответствующего знака.

Определим также альтернированную последовательность

$$\varkappa_1 = 0, \varkappa_2 = 1, \varkappa_3 \dots$$

Определение 31 Подгрань, соответствующая замене j_k -ой звездочки на \varkappa_k называется входящей. В противном случае она называется исходящей.

Теперь зафиксируем множество X и решение теоретико-множественного уравнения тетраэдров $\Phi : X \times X \times X \rightarrow X \times X \times X$.

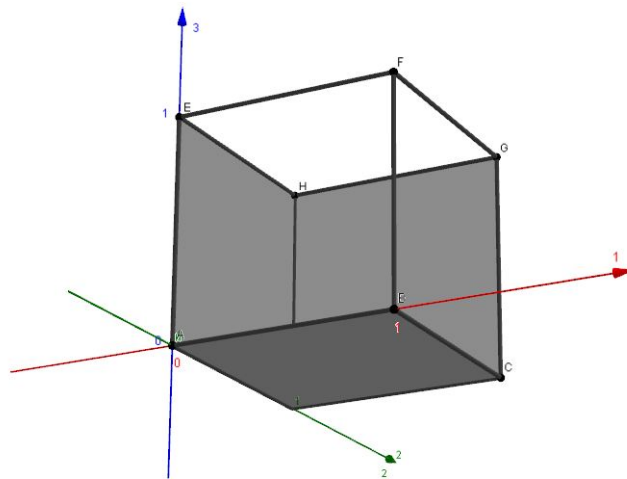
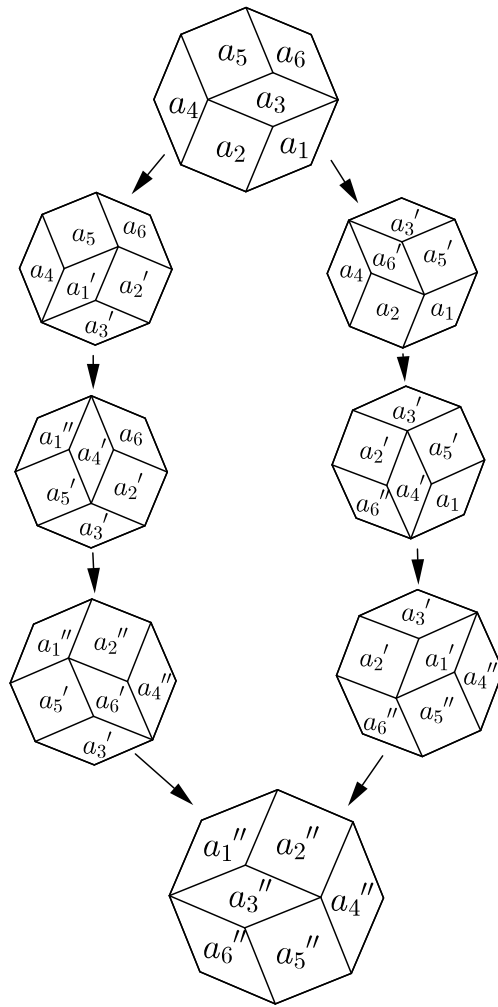


Рис. 16: Входящие (темные) и исходящие (светлые) грани стандартного 3-куба

Определение 32 Раскраска 2-граней N -куба $s : I_2^N \rightarrow X$ называется допустимой, если для любой 3-подграны цвета ее входящих 2-подграней (x, y, z) и цвета соответствующих исходящих 2-подграней (x', y', z') связаны соотношением

$$(x', y', z') = \Phi(x, y, z),$$

где порядок граней определяется по лексикографическому правилу.

Рассмотрим комплекс $C_*(X) = \bigoplus_{n \geq 2} C_n(X)$ где

$$C_n(X) = C_n(X, \mathbb{k}) = \mathbb{k} \cdot C^2(n, X),$$

здесь $C^2(n, X)$ множество допустимых раскрасок 2-граней n -куба, и $\mathbb{k} \cdot C^2(n, X)$ свободный \mathbb{k} -модуль порожденный этим множеством. Дифференциал $d_n : C_n \rightarrow C_{n-1}(X)$ определим по формуле

$$d_n(c) = \sum_{k=1}^n (d_k^i c - d_k^o c),$$

где $d_k^i c$ ($d_k^o c$) это ограничение раскраски c на k -ую входящую (соответственно исходящую) $(n-1)$ -грань куба I^n . Обозначим за $H_*(X, \mathbb{k})$ соответствующие гомологии, которые назовем *тетраэдральными гомологиями X с коэффициентами в \mathbb{k}* .

Определение 33 Назовем n -грань N -куба абсолютно входящей если она не является исходящей ни для какой $n+1$ -грани.

Лемма 8 Раскраска 2-граней N -куба определяется единственным образом по раскраске абсолютно входящих 2-граней.

Рассмотрим траекторию точки в графе Γ_N , вершинами которого являются $n-1$ и n -грани, а ребра отвечают отношению подграниц с направлением от входящей подграницы к грани, и от грани к исходящей подгранице. Допустим, мы сделали несколько шагов по графу описанного типа: $\tau = \tau_1 \rightarrow \tau_2 \rightarrow \dots \rightarrow \tau_p$. Предположим, что позиции звездочек τ_1 и τ_p совпадают (значения остальных символов не так важны). Пусть i самая левая позиция в последовательности $\tau_1 = \tau$, которая меняется хоть раз в процессе трансформаций (это значит, что все символы левее этой позиции одинаковы для всех членов последовательности). Также предположим, что количество звездочек слева четно (нечетный случай разбирается аналогично). Теперь, если звезда заменяется на цифру в этой позиции, то это неизбежно 1; однако, если цифра в позиции i заменяется на звезду, то это обязательно 0. Таким образом, мы никак не можем вернуться в то же положение в последовательности.

Количество абсолютно входящих 2-граней равно C_N^2 . Таким образом компоненты комплекса представляются свободными модулями соответствующих размерностей

$$\begin{aligned} C_2(X) &= \mathbb{k} \cdot X, \\ C_3(X) &= \mathbb{k} \cdot X^{\times 3}, \\ C_4(X) &= \mathbb{k} \cdot X^{\times 6}. \end{aligned}$$

В дальнейшем будем обозначать каждую раскраску набором цветов только входящих граней.

Двойственный объект позволяет определить тетраэдральные когомологии. Рассмотрим двойственный комплекс, то есть комплекс пространств линейных отображений $C_*(X)$ в \mathbb{k} ; дифференциал ∂ соответствует двойственному отображению $d : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X)$.

Приведем примеры дифференциалов для младших размерностей: Для $n=3$ дифференциал задается формулой:

$$d_3((a, b, c)) = (a) + (b) + (c) - (\Phi_1(a, b, c)) - (\Phi_2(a, b, c)) - \Phi_3(a, b, c).$$

В случае $n = 4$

$$\begin{aligned}
& d_4((a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6)) = (a_1, a_2, a_3) - (a_3, a_5, a_6) \\
& - (\Phi_1(a_1, \Phi_2(a_2, a_4, \Phi_3(a_3, a_5, a_6))), \Phi_2(a_3, a_5, a_6)), \Phi_1(a_2, a_4, \Phi_3(a_3, a_5, a_6)), \Phi_1(a_3, a_5, a_6)) \\
& + (\Phi_3(a_1, a_2, a_3), \Phi_3(\Phi_1(a_1, a_2, a_3), a_4, a_5), \Phi_3(\Phi_2(a_1, a_2, a_3), \Phi_2(\Phi_1(a_1, a_2, a_3), a_4, a_5), a_6)) \\
& \quad - (a_1, \Phi_2(a_2, a_4, \Phi_3(a_3, a_5, a_6))), \Phi_2(a_3, a_5, a_6)) - (a_2, a_4, \Phi_3(a_3, a_5, a_6)) \\
& + (\Phi_2(a_1, a_2, a_3), \Phi_2(\Phi_1(a_1, a_2, a_3), a_4, a_5), a_6) + (\Phi_1(a_1, a_2, a_3), a_4, a_5).
\end{aligned}$$

Иногда удобно использовать **потенциальную** версию конструкции. Рассмотрим $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ or \mathbb{C} . С любой коцепью $f : C_n(X) \rightarrow \mathbb{k}$ свяжем отображение $\phi = \exp(f) : C_n(X) \rightarrow \mathbb{k}$, таким образом во всех формулах, определяющих дифференциал, знак суммирования следует заменить на знак умножения. Эти формулы будем называть мультипликативными. Важным для нас примером является $n = 4$; в этом случае коцикличность описывается уравнением $\partial f = 0$ для 3-коцепи:

$$\begin{aligned}
& \varphi(a_1, a_2, a_3)\varphi(a'_1, a_4, a_5)\varphi(a'_2, a'_4, a_6)\varphi(a'_3, a'_5, a'_6) = \\
& = \varphi(a_3, a_5, a_6)\varphi(a_2, a_4, a'_6)\varphi(a_1, a'_4, a'_5)\varphi(a'_1, a'_2, a'_3)
\end{aligned} \tag{17}$$

Лемма 9 Пусть Φ - решение теоретико-множественного уравнения тетраэдров и ϕ - 3-коцикл тетраэдрального комплекса в мультипликативной записи. Обозначим за $V = V(X)$ векторное пространство, порожденное элементами X . Определим линейным оператор A на $V^{\otimes 3}$ указывая значения оператора на базисных векторах следующим образом

$$A(s)(e_x \otimes e_y \otimes e_z) = \phi(x, y, z)^s(e_{x'} \otimes e_{y'} \otimes e_{z'})$$

тогда и только тогда, когда $\Phi(x, y, z) = (x', y', z')$ (здесь e_x обозначают базисный вектор в V , соответствующий элементу $x \in X$). В этом случае $A(s)$ удовлетворяет векторному уравнению тетраэдров.

Замечание 19 Условие полной нормализованности коцикла может быть перефразировано в терминах получающегося линейного оператора следующим образом: если ϕ нормализован в направлении (i, j) , $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$, то $A(s)_j^i = \text{Id}$ и $A(s)_i^j = \text{Id}$.

Пример 11 Рассмотрим электрическое решение уравнения тетраэдров и согласованную раскраску граней 3-куба

$$(x', y', z') = \Phi(x, y, z).$$

Тогда выражения y и y' , рассматриваемые как X -значные функции на раскраске x, y, z, x', y', z' , являются 3-коциклами тетраэдрального коцикла. Кроме прочего их произведение $-yy'$ оказывается нормализованным коциклом.

9.4 Уравнение n -симплекса.

Определение 34 Раскраской $(n - 1)$ -граней куба I^N называется отображение множества $(n - 1)$ -граней в конечное множество X .

Рассмотрим некоторую n -грань $f_n \subset I^N$; она соержит n входящих и n исходящих $(n - 1)$ -граней.

Определение 35 Теоретико-множественным R -оператором называется отображение

$$R: X^{\times n} \rightarrow X^{\times n}$$

определяющее цвета исходящих $(n - 1)$ - граней в f_n по цветам входящих.

Определение 36 Разрешенной раскраской $(n - 1)$ -граней в кубе I^N по отношению к выбранному R -оператору называется раскраска, цвета исходящих граней любого n -подграницы $f_n \subset I^N$ которой связаны с цветами исходящих граней этого куба посредством R .

Оказывается, что для того, чтобы множество допустимых раскрасок было непустым необходимым и достаточным условием является алгебраическое соотношение на R -оператор, который мы будем называть уравнением n -симплекса.

Для того, чтобы определить это уравнение рассмотрим $(n+1)$ - куб I^{n+1} . Построим направленный граф G_{n+1} , вершины которого - n - грани I^{n+1} . Теперь рассмотрим $(n-1)$ -грань, которая является исходящей для одной n -грани и входящей для другой. С такой гранью ассоциируется направленное ребро графа G_{n+1} , связывающее две соответствующие вершины. Оказывается, что G_{n+1} распадается на два n -симплекса, один из которых вывернут на изнанку по отношению к другому.

Теорема 14 Граф G_{n+1} состоит из двух компонент, каждая из которых является n -симплексов. Одна из них (назовем ее левой частью) состоит из граней

$$(0 * * * \dots *), \quad (* 1 * * \dots *), \quad (** 0 * \dots *), \quad \dots \quad (18)$$

Остальные грани

$$(1 * * * \dots *), \quad (* 0 * * \dots *), \quad (** 1 * \dots *), \quad \dots, \quad (19)$$

принадлежат правой компоненте графа.

Кроме того на вершинах графа вводится частичный порядок $a < b$:

$$(0 * * * \dots *) < (* 1 * * \dots *) < (** 0 * \dots *) < \dots \quad (20)$$

на левой части графа, и

$$(1 * * * \dots *) > (* 0 * * \dots *) > (** 1 * \dots *) > \dots \quad (21)$$

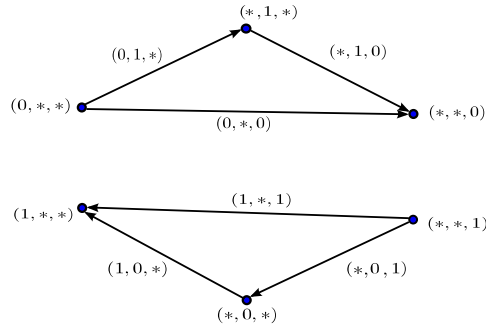
на правой части.

Простейшим примером такого графа является граф G_3 , состоящий из двух треугольников, изображенных на рисунке:

Доказательство теоремы производится следующим образом. Очевидно, что левая и правая части графа являются полносвязными графами, то есть представляют собой n -симплексы. Для доказательства того, что эти подграфы не связаны друг с другом, достаточно взять любые две вершины и показать, что их пересечение является входящим или исходящим для обоих.

Определение 37 Теоретико-множественным уравнением n -симплексов на множестве цветов X называется следующее тождество на композицию R -операторов, действующий справа налево

$$\dots \circ R_{(**0*\dots*)} \circ R_{(*1*\dots*)} \circ R_{(0***\dots*)} = R_{(1***\dots*)} \circ R_{(*0*\dots*)} \circ R_{(**1*\dots*)} \circ \dots$$



Пример 12 Рассмотрим уравнение 2-симплексов. Оно имеет вид

$$R_{**0}R_{*1*}R_{0**} = R_{1**}R_{*0*}R_{**1}.$$

Это уравнение совпадает с уравнением Янга-Бакстера, если заменить звездочки на номера позиций, в которых стоят звездочки, и учесть, что на параллельных гранях стоят одинаковые R -операторы.

Пример 13 В случае $n = 3$ уравнение приобретает вид:

$$R_{***1}R_{**0*}R_{*1**}R_{0***} = R_{1***}R_{*0**}R_{**1*}R_{***0}.$$

Если заменить позиции звездочек на номера получим:

$$R_{123}R_{124}R_{134}R_{234} = R_{234}R_{134}R_{124}R_{123}.$$

Вспомним теперь, что R -оператор действует на раскрасках 2-граней. Обозначим соответственно номера граней:

$$R_{(12)(13)(23)}R_{(12)(14)(24)}R_{(13)(14)(34)}R_{(23)(24)(34)} = R_{(23)(24)(34)}R_{(13)(14)(34)}R_{(12)(14)(24)}R_{(12)(13)(23)}.$$

Если ввести теперь лексикографические порядковые номера 2-граней

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ (12) & (13) & (23) & (14) & (24) & (34) \end{matrix},$$

то уравнение запишется в виде уравнения тетраэдров Замолодчикова.

9.5 Старшие косы

9.6 Кластерная реализация

10 Лекция 9

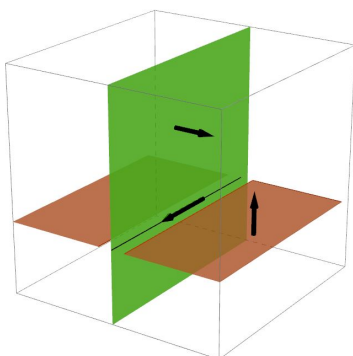
10.1 Статсумма для диаграммы 2-узла

Напомним, что при рассмотрении 2-узлов мы работаем с их диаграммами, то есть с наиболее общими их проекциями в \mathbb{R}^3 . Эти поверхности ограничены в особенностях, они могут иметь дуги двойных точек, тройные точки и точки Уиттни.

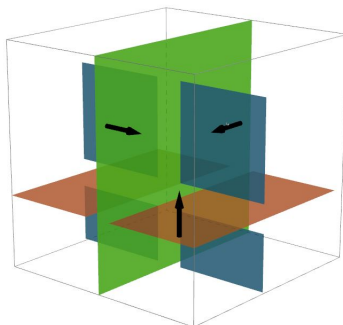
Важным объектом для нас будет граф особых точек Γ . Это граф, вершинами которого являются тройные точки и точки Уиттни, а ребрами - дуги двойных точек. Тройные точки являются вершинами валентности 6, точки Уиттни - валентности 1.

Ориентация на поверхности и информация о листах в точках пересечений, то есть порядок пролегания этих листов позволяет определить следующие ориентации:

1. Ориентация дуг двойных точек определяется так, чтобы касательный вектор вместе с нормальными векторами верхнего и нижнего листов составляли положительную тройку.



2. Ориентация тройной точки $\sigma(\tau)$ определяется как знак тройки нормальных векторов к верхнему, среднему и нижнему листам в точке соответственно.



3. Кроме этого можно определить порядок ребер, входящих в тройную точку в соответствии с порядком листов, трансверсальных данным ребрам.

Зафиксируем также решение теоретико-множественного уравнения тетраэдров (X, Φ) , где X - конечное множество из h элементов. Введем важное определение раскраски графа.

Определение 38 Скажем, что $s(\Gamma)$ это раскраски графа Γ если каждому ребру e графа Γ сопоставлен элемент $x_e \in X$ таким образом, что в окрестности тройной точки $\tau \in \Gamma$ элементы, соответствующие входящим и исходящим ребрам связаны соотношением

$$(x', y', z') = \Phi^{\sigma(\tau)}(x, y, z).$$

Зафиксируем также ϕ - мультипликативный 3-коцикл в тетраэдральных когомологиях $H^3(X, \Phi)$ с коэффициентами в поле вещественных или комплексных чисел. Весом тройной точки τ на диаграмме назовем величину $\phi^{\sigma(\tau)}(x_\tau, y_\tau, z_\tau)$, where (x_τ, y_τ, z_τ) - цвета входящих ребер, если $\sigma(\tau) = 1$ и цвета исходящих ребер в противном случае (порядок ребер задается указанным выше способом).

Введем также переменную s из рассматриваемого поля и соответствующую статистическую сумму

$$\chi_\phi(s; \Gamma) = h^{-d} \sum_{c(\Gamma)} \prod_{\tau \in \Gamma_6} \phi^{\sigma(\tau)s}(x_\tau, y_\tau, z_\tau), \quad (22)$$

Здесь d - число связных компонент графа особых точек $\Gamma(D)$

Определение 39 *Квази-инвариантом $\chi_\phi(s; \Sigma)$ 2-узла Σ называется $\chi_\phi(s; \Gamma(D))$, где D это некоторая диаграмма, а $\Gamma(D)$ обозначает граф особых точек $\Sigma(D)$.*

Предложение 6 *Пусть X конечное множество, $\Phi : X^{\times 3} \rightarrow X^{\times 3}$ решение теоретико-множественного уравнения тетраэдров, пусть также $\phi \in C_3(X)$ - мультипликативный 3-коцикл. Тогда выражение $\chi_\phi(s; \Sigma)$ не зависит от изменения диаграммы при 1-м, 3-ем, 5-ом, и 7-ом движении Розмана. Если, кроме этого, коцикл нормализован по направлениям (1, 2) и (2, 3) (в частности, если он полностью нормализован), то квазиинвариант не меняется и при 6-ом движении Розмана.*

Замечание 20 *В формулировке теоремы используется понятие нормализованного коцикла. Для его определения воспользуемся понятием частично-двойственного оператора, ассоциированного с решением уравнения тетраэдров Φ : в частности мы скажем, что*

$$\Phi^{t_2}(x, y, z) = (x', y', z'),$$

если

$$\Phi(x, y', z) = (x', y, z').$$

Очевидно, можно рассмотреть двойственность по любому направлению или набору направлений, которые мы будем обозначать, как Φ^{t_i} или $\Phi^{t_i t_j}$, $i, j = 1, 2, 3$. Очевидно, что такие операции хорошо определены только для Φ общего положения, что и будет условием при дальнейших рассмотрениях. Заметим, что $\Phi^{t_1 t_2 t_3} = \Phi^{-1}$; также заметим, что выполняется тождество $(\Phi^{t_i})^{t_i} = \Phi$, которое в частности влечет $(\Phi^{t_i})^{-1} = \Phi^{t_j t_k}$, $\{j, k\} = \{1, 2, 3\} \setminus \{i\}$.

Замечание 21 *Теперь определим собственно понятие нормализованного коцикла в терминах линейного оператора $A(s)$ построенного по Φ и $\phi \in H^3(X, \Phi)$. А именно, коцикл называется нормализованным по направлениям i, j если конволюция оператора $A(s)_j^i$ и $A(s)_i^j$ представляет собой тривиальный оператор.*

10.2 Доказательство основной теоремы. 1-е, 5-е и 6-е движения.

Прежде всего заметим, как получается инвариантность относительно 1-го и 5-го движений. В обоих случаях увеличивается количество связных компонент, сумма в значении $\chi_\phi(s; \Sigma)$ умножается на количество элементов X , но общее выражение не меняется.

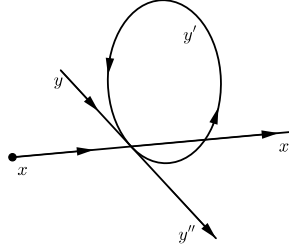
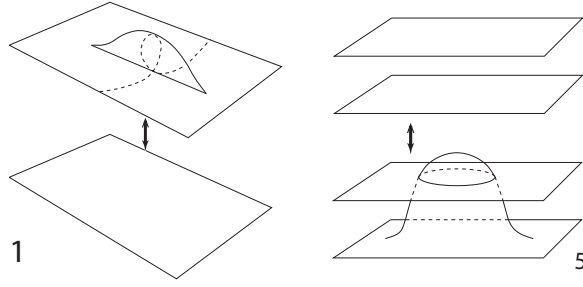


Рис. 17: Правая часть 6-го движения

Рассмотрим подробнее 6-е движение. С одной стороны, мы имеет диаграмму 18. в окрестности тройной точки.

Рассмотрим пример нормализованного коцикла для электрического решения, например, для одной из его конечных редукций. Рассмотрим в первую очередь порядок (x, y, y') . Условие согласованности цветов в тройной точке записываются в виде:

$$\begin{aligned} x' &= xy/(x + y' + xyy'), \\ y' &= x + y' + xyy', \\ y'' &= yy'/(x + y' + xyy'). \end{aligned}$$

Из второго уравнения вытекает $yy' = -1$. Подставляя это равенство в другие уравнения получим $x' = -xy^2, y'' = y$. Неэквивалентная конфигурация (x, y', y) приводит к следующим уравнениям:

$$\begin{aligned} x' &= xy'/(x + y + xyy'), \\ y'' &= x + y + xyy', \\ y' &= yy'/(x + y + xyy'). \end{aligned}$$

Третье уравнение влечет $yy' = -1$. Если подставить это условие в остальные уравнения, получим $x' = -xy^{-2}, y'' = y$. Остальные конфигурации получаются из этих благодаря симметрии электрического решения относительно замены $1 \leftrightarrow 3$. Это вычисление показывает, что пространство допустимых раскрасок ребер графа 17 совпадает с пространством раскрасок, соответствующих конфигурации левой части 6-го движения: Кроме этого, мы замечаем, что коцикл $-yy'$ принимает тривиальное значение 1 в этом случае, то есть не составляет вклада в общую статсумму.

Заметим, что это свойство характерно для любых 1-2 или 2-3 нормализованных коциклов.

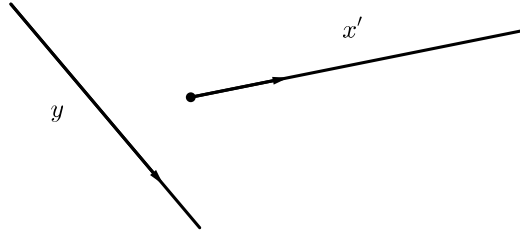


Рис. 18: Левая часть 6-го движения

10.3 3-е и 7-е движения

Начнем с более простого в комбинаторном смысле 3-го движения. И в первую очередь проанализируем пространство раскрасок. Назовем цвета входящих ребер на диаграмме (x, y, z) и цвета исходящих (x', y', z') . Мы докажем, что для любого набора цветов входящих ребер существует единственный набор цветов исходящих, и эти цвета совпадают для двух эквивалентных диаграмм. Заметим, что знаки тройных точек на диаграмме отличаются. В этой связи имеется две различные ситуации: все три ребра ориентированы одинаково, либо одно ребро имеет отличающуюся ориентацию от двух других. В первом случае имеем следующие соотношения:

$$(x, y, z) \xrightarrow{\Phi} (x', y', z') \xrightarrow{\Phi^{-1}} (x, y, z),$$

во втором имеем аналогичное выражение для частично-двойственных отображений:

$$(x, y, z) \xrightarrow{\Phi^{t_2}} (x', y', z') \xrightarrow{(\Phi^{-1})^{t_2}} (x, y, z).$$

Заметим, что эти две точки не меняют статсуммы, так как они имеют разные знаки значения коциклов компенсируют друг друга.

При доказательстве инвариантности относительно 7-го движения очевидным является утверждение для канонической ориентации всех ребер, то есть для конфигурации на рисунке:

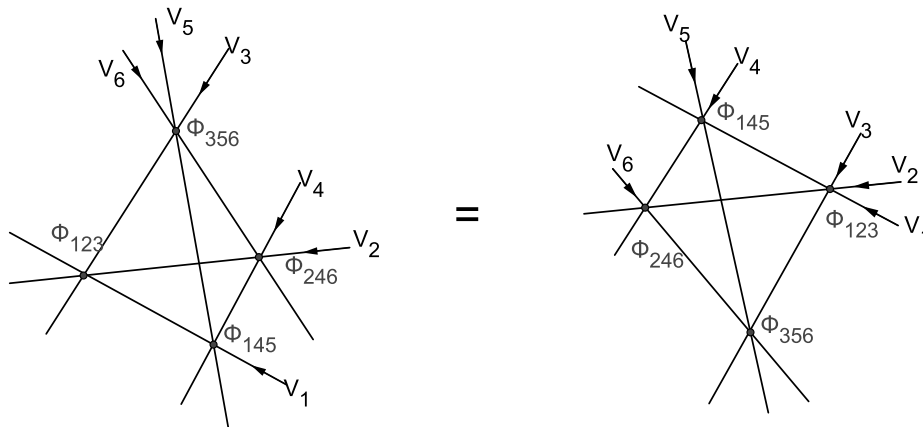


Рис. 19: 7-е движение, стандартная конфигурация

В этом случае почти очевидно, что 7-е движение сохраняет пространство допустимых раскрасок. Действительно, если отметить цвета входящих 6-и ребер, то существует единственная раскраска исходящих 6-и ребер и совпадение этих раскрасок для двух сторон движения гарантируется уравнением тетраэдра. Произведение значений коцикла совпадает в силу условия на 3-коцикл. Удобно также использовать оператор $A(s)$, агрегирующий и решение ТМУТ, и коцикл.

Остальные конфигурации отличаются от данной последовательностью мутаций двух видов:

1. обращение ориентации одного листа;
2. изменение порядка расположения двух листов.

Рассмотрим мутацию первого типа для листа 356, то есть листа, содержащего направления 1, 2 и 4. В этом случае поменяют ориентацию вершины 123, 145, 246, а также ребра 1, 2 и 4. Данная конфигурация показана на рисунке: Необходимо дока-

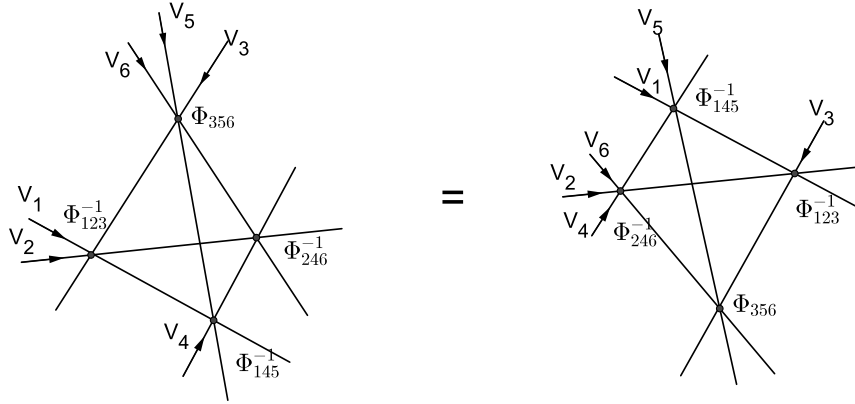


Рис. 20: 7-е движени, обращение 356

зять, что

$$(\Phi_{123}^{t_1, t_2})^{-1} (\Phi_{145}^{t_1, t_4})^{-1} (\Phi_{246}^{t_2, t_4})^{-1} \Phi_{356} = \Phi_{356} (\Phi_{246}^{t_2, t_4})^{-1} (\Phi_{145}^{t_1, t_4})^{-1} (\Phi_{123}^{t_1, t_2})^{-1}.$$

Это выражение может быть упрощено

$$\Phi_{123}^{t_3} \Phi_{145}^{t_5} \Phi_{246}^{t_6} \Phi_{356} = \Phi_{356} \Phi_{246}^{t_6} \Phi_{145}^{t_5} \Phi_{123}^{t_3}. \quad (23)$$

Докажем, что 23 является следствием уравнения тетраэдров, для чего рассмотрим эквивалентную форму последнего:

$$(\Phi_{356})^{-1} \Phi_{123} \Phi_{145} \Phi_{246} = \Phi_{246} \Phi_{145} \Phi_{123} (\Phi_{356})^{-1}$$

и выполним частичное обращение обеих частей равенства по отношению к компонентам 3, 5 и 6. Начнем с левой части:

$$((\Phi_{356})^{-1} \Phi_{123} \Phi_{145} \Phi_{246})^{t_3, t_5, t_6} = (\Phi_{123} \Phi_{145} \Phi_{246})^{t_3, t_5, t_6} \Phi_{356} = \Phi_{123}^{t_3} \Phi_{145}^{t_5} \Phi_{246}^{t_6} \Phi_{356}.$$

В правой части имеем:

$$(\Phi_{246} \Phi_{145} \Phi_{123} (\Phi_{356})^{-1})^{t_3, t_5, t_6} = \Phi_{356} (\Phi_{246} \Phi_{145} \Phi_{123})^{t_3, t_5, t_6} = \Phi_{356} \Phi_{246}^{t_6} \Phi_{145}^{t_5} \Phi_{123}^{t_3}.$$

Аналогично обрабатываются и другие конфигурации.

Докажем теперь инвариантность относительно мутации второго типа. Рассмотрим, например, ситуацию изменения порядка прохождения граней 123 и 356. В этом случае меняются знаки вершин 123 и 356, а также направление ребра 3. Кроме этого меняется порядок вхождения ребер в вершинах 123 и 356. Проиллюстрируем ситуацию картинкой: Необходимо доказать:

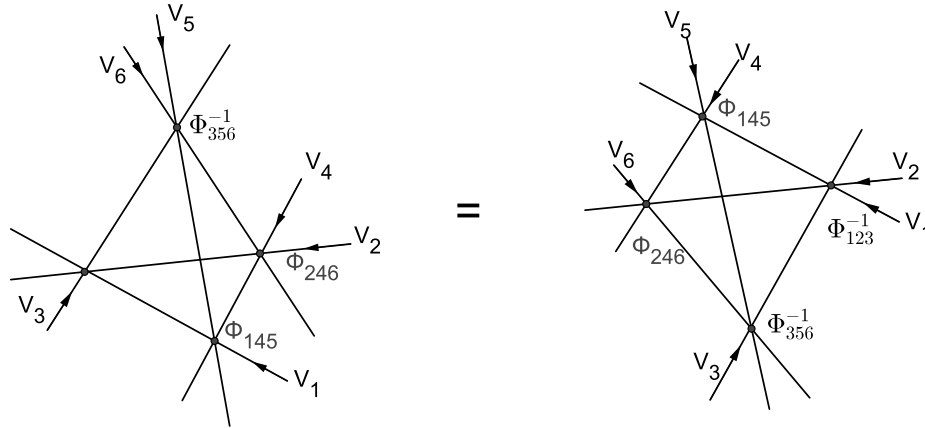


Рис. 21: 7-е движение, изменение порядка листов.

$$(\Phi_{213}^{t_3})^{-1} \Phi_{145} \Phi_{246} (\Phi_{365}^{t_3})^{-1} = (\Phi_{365}^{t_3})^{-1} \Phi_{246} \Phi_{145} (\Phi_{213}^{t_3})^{-1}. \quad (24)$$

Для это рассмотрим эквивалентную форму уравнения тетраэдров

$$\Phi_{246} \Phi_{145} \Phi_{123} (\Phi_{356})^{-1} = (\Phi_{356})^{-1} \Phi_{123} \Phi_{145} \Phi_{246}$$

Затем выполним замену индексов $1 \leftrightarrow 2$, $5 \leftrightarrow 6$,

$$\Phi_{145} \Phi_{246} \Phi_{213} (\Phi_{365})^{-1} = (\Phi_{365})^{-1} \Phi_{213} \Phi_{246} \Phi_{145}$$

и частичное обращение по отношению к индексу 3:

$$\Phi_{145} \Phi_{246} \Phi_{365}^{t_5 t_6} \Phi_{213}^{t_3} = \Phi_{213}^{t_3} \Phi_{365}^{t_5 t_6} \Phi_{246} \Phi_{145}.$$

Умножим обе стороны на $\Phi_{213}^{t_1 t_2}$.

11 Лекция 10

11.1 Интегрируемость в $d = 1$

Еще раз напомним две формы уравнения Янга-Бакстера

$$R_{12} R_{13} R_{23} = R_{23} R_{13} R_{12}$$

и форму, родственную с 3-м движением Рейдемейстера совместно с уравнением RLL:

$$R'_{12} R'_{23} R'_{12} = R'_{23} R'_{12} R'_{23} \quad (25)$$

$$R' L \otimes L = L \otimes L R' \quad (26)$$

где $R' \in \text{End}(V)^{\otimes 2}$ и $L \in \text{End}(V) \otimes \text{End}(V_q)$, здесь V_q квантовое векторное пространство (то есть еще одно пространство, отличающееся от V .) Уравнение RLL играет важную роль в квантовом методе обратной задачи и в конструкции алгебре Фаддеева-Решетихина-Тахтаджяна [16]. Примером решения (26) является выражение

$$L = R_{1i_1} R_{1i_2} \dots R_{1i_k},$$

где L оператор в квантовом пространстве $V_q = V_{i_1} \otimes \dots \otimes V_{i_k}$, где V_{i_j} это копия пространства V .

В работе [15] предлагается конструкция коммутативного семейства в алгебре $\text{End}(V_q)$, содержащего $I_1 = \text{Tr}_V L$.

Лемма 10 ([15]) Введем обозначение L_i для соответствующего элемента в $\text{End}(V_i) \otimes \text{End}(V_q)$. Тогда операторы

$$I_k = \text{Tr}_{1\dots k} L_1 \dots L_k R'_{12} R'_{23} \dots R'_{k-1,k}$$

коммутируют в $\text{End}(V_q)$. Предполагается след по вспомогательным пространствам V_i .

11.2 Доказательство коммутативности в $d = 1$

Представим здесь собственное доказательство результата Майе. В этом разделе R и L обозначают решения уравнений (25) и (26) кроме того предполагается, что R обратима. Представим генераторы Майе в несколько иной форме:

$$I_k = \text{Tr}_{V_1 \otimes \dots \otimes V_k} L^{\otimes k} R_{12} \dots R_{k-1,k}, \quad (27)$$

где рассматривается тензорное произведение по отношению к вспомогательному пространству V_i , в квантовом пространстве V_q предполагается произведение операторов. Для доказательства коммутативности I_k докажем существование линейного оператора $A \in \text{End}(V)^{\otimes k+l}$ такого что

$$AL^{\otimes k+l} R_{12} \dots R_{k-1,k} R_{k+1,k+2} \dots R_{k+l-1,k+l} A^{-1} = L^{\otimes k+l} R_{12} \dots R_{l-1,l} R_{l+1,l+2} \dots R_{k+l-1,k+l}.$$

В свою очередь такое свойство влечет, что следы выражений в правой и левой частях совпадают, что эквивалентно требуемому равенству:

$$[I_k, I_l] = 0.$$

В дальнейшем $Ad_g X$ означает групповое присоединенное действие gXg^{-1} . Введем несколько дополнительных обозначений: $R_{l\overline{m}} = R_{l,l+1} R_{l+1,l+2} \dots R_{m-1,m}$ for $l < m$. Эти выражения удовлетворяют соотношениям

Лемма 11

$$Ad_{R_{1\overline{k}}} R_{m,m+1} = R_{m+1,m+2}, \quad 1 \leq m \leq k-2. \quad (28)$$

Доказательство

$$\begin{aligned} & R_{12} \dots R_{m-1,m} R_{m,m+1} R_{m+1,m+2} \dots R_{k-1,k} R_{m,m+1} R_{k-1,k}^{-1} \dots R_{m+1,m+2}^{-1} R_{m,m+1}^{-1} R_{m-1,m}^{-1} \dots R_{12}^{-1} \\ = & R_{12} \dots R_{m-1,m} R_{m,m+1} \overline{R_{m+1,m+2} R_{m,m+1} R_{m+1,m+2}^{-1} R_{m,m+1}^{-1} R_{m-1,m}^{-1}} \dots R_{12}^{-1} \\ = & R_{12} \dots R_{m-1,m} \overline{R_{m,m+1} R_{m+1,m+2} R_{m,m+1}^{-1} R_{m,m+1}^{-1} R_{m-1,m}^{-1}} \dots R_{12}^{-1} \\ = & R_{12} \dots R_{m-1,m} R_{m+1,m+2} R_{m-1,m}^{-1} \dots R_{12}^{-1} = R_{m+1,m+2}. \end{aligned}$$

□

Еще одно соотношение представляется в виде

Лемма 12

$$Ad_{R_{2k}} Ad_{R_{1,k-1}} R_{k-1,k} = R_{12}. \quad (29)$$

Доказательство

Докажем утверждение по индукции. Для $k = 3$ имеем

$$R_{23} R_{12} R_{23} R_{12}^{-1} R_{23}^{-1} = R_{23} R_{23}^{-1} R_{12} R_{23} R_{23}^{-1} = R_{12}.$$

Пусть утверждение верно для $k - 1$, тогда

$$\begin{aligned} & Ad_{R_{2k}} Ad_{R_{1,k-1}} R_{k-1,k} \\ &= R_{23} \dots R_{k-1,k} R_{12} \dots R_{k-3,k-2} R_{k-2,k-1} R_{k-1,k} R_{k-2,k-1}^{-1} R_{k-3,k-2}^{-1} \dots R_{12}^{-1} R_{k-1,k}^{-1} \dots R_{23}^{-1} \\ &= R_{23} \dots R_{k-1,k} R_{12} \dots R_{k-3,k-2} R_{k-1,k}^{-1} R_{k-2,k-1} R_{k-1,k} R_{k-3,k-2}^{-1} \dots R_{12}^{-1} R_{k-1,k}^{-1} \dots R_{23}^{-1} \\ &= R_{23} \dots R_{k-2,k-1} R_{12} \dots R_{k-3,k-2} R_{k-2,k-1} R_{k-3,k-2}^{-1} \dots R_{12}^{-1} R_{k-2,k-1}^{-1} \dots R_{23}^{-1} \\ &= Ad_{R_{2,k-1}} Ad_{R_{1,k-2}} R_{k-2,k-1} = R_{12}. \end{aligned}$$

□

Теперь сконструируем A по формуле:

$$A = R_{l,k+l} R_{l-1,k+l-1} \dots R_{1,k+1}. \quad (30)$$

Лемма 13

$$Ad_A(L^{\otimes k+l} R_{12} \dots R_{k-1,k} R_{k+1,k+2} \dots R_{k+l-1,k+l}) = L^{\otimes k+l} R_{12} \dots R_{l-1,l} R_{l+1,l+2} \dots R_{k+l-1,k+l}.$$

Доказательство

Заметим, что в силу уравнения (26) требуется доказать только

$$Ad_A(R_{12} \dots R_{k-1,k} R_{k+1,k+2} \dots R_{k+l-1,k+l}) = R_{12} \dots R_{l-1,l} R_{l+1,l+2} \dots R_{k+l-1,k+l}.$$

с другой стороны лемма 11 влечет

$$Ad_A(R_{12} \dots R_{k-1,k}) = R_{l+1,l+2} \dots R_{k+l-1,k+l}. \quad (31)$$

Из леммы 12 следует

$$Ad_A(R_{k+1,k+2} \dots R_{k+l-1,k+l}) = R_{12} R_{23} \dots R_{l-1,l}. \quad (32)$$

Коммутативность правых частей выражений (31) и (32) заканчивает доказательство.

□

Это рассуждение может быть обобщено на производящие функции интегралов. Введем обозначение:

$$S(t) = L^{\otimes N} (1 + tR_{12} + t^2 R_{12} R_{23} + \dots + t^{N-1} R_{12} \dots R_{N-1,N})$$

Тогда

$$Q(t) = Tr S(t) = \sum_{k=0}^{N-1} t^k I_k I_1^{N-k}.$$

Если кроме этого рассмотреть оператор сопряжения

$$A = R_{N,2N} R_{N-1,2N-1} \dots R_{1,N+1}. \quad (33)$$

то

$$Ad_A(S(t) \otimes S(u)) = S(u) \otimes S(t).$$

Это немедленно влечет

$$[Q(t), Q(u)] = 0.$$

11.3 Регулярные 3-d решетки и статистические модели

Рассмотрим периодическую трехмерную решетку размера $K \times L \times M$, раскрасим ребра, входящие в вершин (i, j, k) переменными $x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k}$. Условие периодичности означает в частности $*_{K+1,j,k} = *_{1,j,k}$.

Рассмотрим статистическую модель с Больцмановскими весами сосредоточенными в узлах решетки, определяемыми значениями 3-коцикла φ тетраэдрального комплекса. Состояния модели определяются допустимыми раскрасками ребер, то есть такими раскрасками, что в каждом узле выполняется условие согласованности:

$$\Phi(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k}) = (x_{i+1,j,k}, y_{i,j+1,k}, z_{i,j,k+1}). \quad (34)$$

Статсумма модели определяется по формуле:

$$Z(s) = \sum_{Col} \prod_{i,j,k} \varphi(x_{i,j,k}, y_{i,j,k}, z_{i,j,k})^s. \quad (35)$$

Замечание 22 Мы будем называть интегрируемой систему, в которой существует послойная трансферматрица, с помощью которой вычисляется статсумма в виде следа степени. Кроме того будет необходимым условие интегрируемости соответствующей квантовой системы, то есть возможность включения трансферматрицы в “большое” коммутативное семейство.

Для того, чтобы определить послойную трансферматрицу сопоставим пространств V каждой прямой решетке. Для удобства обозначим вертикальные пространства символами V_{ik} а горизонтальные - E_i and N_k .

Построим оператор $A_{ik}(s)$, действующий в пространстве $E_i \otimes V_{ik} \otimes N_k$ для фиксированного 3-коцикла в соответствии с приведенной ранее конструкцией.

Определим послойную трансферматрицу как произведение:

$$T(s) = Tr \prod_{\vec{i}} \prod_{\vec{k}} A_{ik}(s) = Tr(B_1(s) \dots B_K(s)),$$

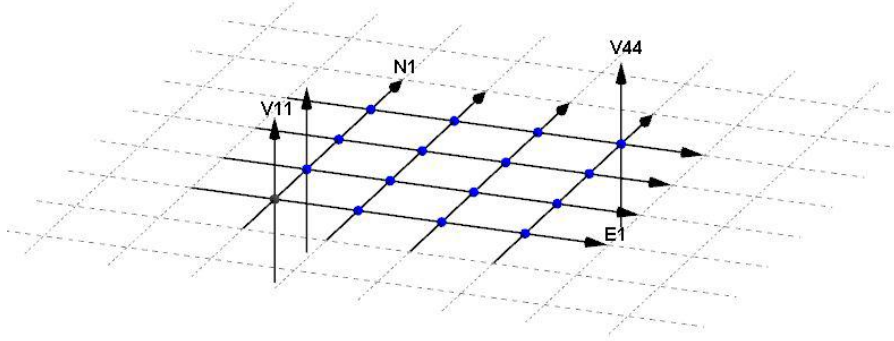


Рис. 22: Конфигурация одного слоя

где

$$B_i(s) = A_{i1}(s) \dots A_{iM}(s).$$

В этой формуле предполагается, что след матриц берется по отношению к горизонтальным пространствам. Результат оказывается оператором, который действует в тензорном произведении вертикальных пространств. Оказывается, что статсумма принимает форму

$$Z(s) = Tr_{V_{jk}} T(s)^L.$$

11.4 Некоторые следствия уравнения тетраэдров

Введем несколько обозначений для трансформатрицы на $K \times L \times M$ регулярной решетке

$$\Phi_{(i) * (j)} = \Phi_{(i_1 \dots i_K) * (j_1 \dots j_M)} = \prod_{s \in \overrightarrow{(1, \dots, K)}}^{t \in \overrightarrow{(1, \dots, M)}} \Phi_{i_s l_t^s j_t} = \prod_{s \in \overrightarrow{(1, \dots, K)}} \Phi_{i_s (l_1^s \dots l_M^s) (j_1 \dots j_M)} = \prod_{s \in \overrightarrow{(1, \dots, K)}} \Phi_{i_s (l^s) (j)}. \quad (36)$$

Стрелки над набором индексов обозначают порядок перемножения соответствующих множителей. Например,

$$\prod_{s \in \overrightarrow{(1, \dots, K)}} A_s = A_1 \dots A_K.$$

В последних двух частях уравнения (36) мы используем обозначения:

$$\begin{aligned} \Phi_{k(i)(j)} &= \Phi_{k(i_1 \dots i_t)(j_1 \dots j_t)} = \prod_{s \in \overrightarrow{(1, \dots, t)}} \Phi_{k i_s j_s}, \\ \Phi_{(i)(j)k} &= \Phi_{(i_1 \dots i_t)(j_1 \dots j_t)k} = \prod_{s \in \overrightarrow{(1, \dots, t)}} \Phi_{i_s j_s k}, \end{aligned}$$

где разные буквы в индексах означают разным копиям пространства V .

Замечание 23 Сделаем несколько уточнений в отношении обозначений индексов. Здесь (i) обозначает мультииндекс (i_1, \dots, i_s) . В дальнейшем мы используем последовательности мультииндексов, мы используем суперскрипт для обозначения номера мультииндекса в последовательности мультииндексов. Например, (i^l) означает мультииндекс (i_1^l, \dots, i_s^l) . В случае необходимости будем специально указывать размер мультииндекса s .

Собственно трансформатрица может быть представлена в виде следа следующего выражения (36)

$$T = I_1 = Tr_{(i)(j)} \Phi_{(i)*(j)}, \quad (37)$$

где (i) - K -мультииндекс, (j) - M -мультииндекс.

Запишем несколько тождеств, которые являются непосредственными следствиями уравнения тетраэдров. В определенном смысле они являются обобщениями RLL -соотношения.

Лемма 14

$$\Phi_{123} \Phi_{1(i)(j)} \Phi_{2(i)(l)} \Phi_{3(j)(l)} = \Phi_{3(j)(l)} \Phi_{2(i)(l)} \Phi_{1(i)(j)} \Phi_{123}, \quad (38)$$

$$\Phi_{(i)(j)1} \Phi_{(i)(l)2} \Phi_{(j)(l)3} \Phi_{123} = \Phi_{123} \Phi_{(j)(l)3} \Phi_{(i)(l)2} \Phi_{(i)(j)1}, \quad (39)$$

$$\Phi_{(i)(i')0} \Phi_{(i)*(j)} \Phi_{(i')*(j')} \Phi_{0(j)(j')} = \Phi_{0(j)(j')} \Phi_{(i')*(j')} \Phi_{(i)*(j)} \Phi_{(i)(i')0}, \quad (40)$$

для s -мультииндексов $(i), (j), (l)$ в (38,39) и K -мультииндексов $(i), (i')$ и M -мультииндексов $(j), (j')$ в (40).

Доказательство дается в разделе ??.

Введем также дополнительные “подкрученные” обозначения:

$$\begin{aligned} \Phi_{123}^L &= P_{12} \Phi_{123}, & \tilde{\Phi}_{123}^L &= P_{23} \Phi_{123}, \\ \Phi_{123}^R &= \Phi_{123} P_{23}, & \tilde{\Phi}_{123}^R &= \Phi_{123} P_{12}. \end{aligned}$$

Выполняются аналогичные соотношения:

$$\Phi_{123}^L \Phi_{145} \Phi_{246} \Phi_{356}^R = \Phi_{356}^R \Phi_{145} \Phi_{246} \Phi_{123}^L, \quad (41)$$

$$\tilde{\Phi}_{\alpha\beta\gamma}^L \Phi_{\alpha 12}^R \Phi_{\beta 23} \tilde{\Phi}_{\gamma 13} = \Phi_{\beta 23} \tilde{\Phi}_{\gamma 13} \Phi_{\alpha 12}^R \tilde{\Phi}_{\alpha\beta\gamma}^L, \quad (42)$$

$$\Phi_{145}^R \Phi_{123}^R \Phi_{356}^L \Phi_{246}^L = \Phi_{356}^L \Phi_{246}^L \Phi_{145}^R \Phi_{123}^R, \quad (43)$$

$$\tilde{\Phi}_{123}^L \tilde{\Phi}_{145}^L \tilde{\Phi}_{246}^R \tilde{\Phi}_{356}^R = \tilde{\Phi}_{246}^R \tilde{\Phi}_{356}^R \tilde{\Phi}_{123}^L \tilde{\Phi}_{145}^L. \quad (44)$$

Эти соотношения являются аналогами уравнения Янга-Бакстера в комбинаторной форме.

11.5 Два семейства

Уделим некоторое внимание связи, существующей между уравнением тетраэдров и уравнением Янга-Бакстера. Рассмотрим обратимое решение уравнения тетраэдров Φ . В этом случае уравнение может быть преобразовано к виду:

$$\Phi_{123} \Phi_{1(i)(j)} \Phi_{2(i)(l)} \Phi_{3(j)(l)} \Phi_{123}^{-1} = \Phi_{3(j)(l)} \Phi_{2(i)(l)} \Phi_{1(i)(j)}$$

где (i) , (j) и (l) мультииндексы размера s . Если теперь рассмотреть след обеих частей по индексам $1, 2, 3$, можно получить, что $R_{(i)(j)} = Tr_1 \Phi_{1(i)(j)}$ удовлетворяет уравнению Янга-Бакстера (??) в тензорном произведении $V^{\otimes s}$. Кроме этого мы получим

$$\Phi_{(i)(i')0} \Phi_{(i)*(j)} \Phi_{(i')*(j')} \Phi_{0(j)(j')} \Phi_{(i)(i')0}^{-1} = \Phi_{0(j)(j')} \Phi_{(i')*(j')} \Phi_{(i)*(j)},$$

где (i) и (i') мультииндексы размера K , $(j), (j')$ - размера M . Если рассмотреть след обеих частей по отношению к пространствам $(i), (i'), 0$ оказывается, что $L_{*(j)} = Tr_{(i)} \Phi_{(i)*(j)}$ удовлетворяет RLL соотношению:

$$L_{*(j)} L_{*(j')} R_{(j)(j')} = R_{(j)(j')} L_{*(j')} L_{*(j)}.$$

Замечание 24 Таким образом, данные

$$L_{*(j)} = Tr_{(i)} \Phi_{(i)*(j)}, \quad R'_{(i)(j)} = Tr_1 \Phi_{1(i)(j)}^R$$

удовлетворяют условиям леммы 10. Непосредственным следствием этого является то, что следующий набор оператором:

$$I_{0,k} = Tr_{(j^l), l=1, \dots, k} \prod_{l=1, \dots, k} L_{*(j^l)} \prod_{m=1, \dots, k-1} R'_{(j^m)(j^{m+1})}$$

коммутирует и содержит $I_1 = Tr_{(j)} L_{*(j)} = Tr_{(i)(j)} \Phi_{(i)*(j)}$. Здесь (j^m) имеют размер M .

Аналогичным образом можно показать, что семейство

$$I_{n,0} = Tr_{(i^l)(j^l)(t)} \prod_{l=1, \dots, n} \Phi_{(i^l)*(j^l)} \prod_{m=1, \dots, n-1} \Phi_{(i^m)(i^{m+1})t_m}^L$$

также коммутативно и включает I_1 . В работе [12] показано, что эти два семейства коммутируют между собой.

12 Лекция 11

12.1 Квантовые топологические теории поля

В этом разделе используются источники [17], [18], [19]. Основным примером квантовой топологической теории поля в $d = 3$ является теория Черна-Саймонса, которая определяется на пространстве главных расслоений со структурной группой G над многообразием M . Действие теории в лагранжевом описании определяется по связности A в расслоении

$$S = \frac{k}{4\pi} \int_M tr \left(A \wedge dA + \frac{2}{3} A \wedge A \wedge A \right).$$

Классические траектории теории описываются уравнением:

$$\frac{\delta S}{\delta A} = \frac{k}{2\pi} F = 0,$$

где кривизна связности имеет стандартное определение

$$F = dA + A \wedge A.$$

Таким образом, классическими состояниями оказываются плоские связности. В квантовой теории вычисляются корреляционные функции операторов. Важным примером оператора является петля Вильсона, определяемая по среднее от голономии связности вокруг некоторой петли K :

$$W_R(K) = \text{Tr}_R \text{Pexp} \oint_K A,$$

где A - форма связности, R - некоторое представление структурной группы. Оказывается, что если M - сфера, $G = U(N)$, то среднее $\langle W_R(K) \rangle$ с точностью до константы совпадает с полиномом HOMFLY узла, соответствующего K . Для $N = 2$ та же конструкция дает полином Джонса.

Определение 40 (Аксиоматической) n -мерной квантовой теорией поля называется категория замкнутых ориентированных $n - 1$ - многообразий V , оснащенных гильбертовыми пространствами H_V . Морфизмами пары объектом V_1, V_2 в категории являются ориентированные n -мерные кобордизмы W , чьи границы состоят из двух частей с противоположными ориентациями

$$\partial W = V_1 \cup \bar{V}_2,$$

причем это многообразие оснащено линейным отображением:

$$f_W : H_{V_1} \rightarrow H_{\bar{V}_2}.$$

С учетом аксиомы:

$$H_{\bar{V}} = H_V^*$$

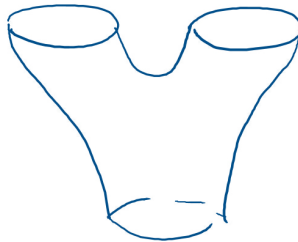
можно считать, что

$$H_{V_1 \cup \bar{V}_2} = H_{V_1} \otimes H_{V_2}.$$

Замечание 25 Собственно, инвариантом n -мерного многообразия, которое получается склейкой двух многообразий W_1 и W_2 по общей границе V оказывается число

$$\langle f_{W_1}, f_{W_2} \rangle$$

Опишем подробнее пример 2-мерной квантовой топологической теории поля. В таком случае кобордизмы реализуются композицией элементарных “штанов”, то есть двумерных многообразий, с тремя компонентами границы с компонентами границы



V_1, V_2, \bar{V}_3 . Каждый такой морфизм задает тензор C_{ij}^k на пространстве H_V , который является тензором структурных констант фробениусовой алгебры, то есть коммутативной, ассоциативной алгебры с единицей и скалярным произведением η_{ij} , удовлетворяющим тождеству

$$\langle fg, h \rangle = \langle f, gh \rangle.$$

В такой теории исследуют корреляторы, в том числе

1. 0-петлевые парные корреляторы η_{ij} ;
2. 0-петлевые тройные корреляторы

$$C_{ijk} = \eta_{is} C_{jk}^s;$$

3. общие корреляторы вида

$$\langle e_i \dots e_l, \eta^{ij} e_i e_j \rangle.$$

Рассмотрим так называемую теорию Виттена-Диграафа-Верлинде-Верлинде. Введем пространство с координатами t^1, \dots, t^n , постоянную метрику η_{ij} , структурные константы фробениусовой алгебры $C(t)$

12.2 Квантование пространства плоских связностей

Основная идеология состоит в том, чтобы использовать так называемое голоморфное квантование. В первую очередь рассматривается классическое фазовое пространство, то есть пространство плоских связностей на 3-многообразии. В случае, если многообразие представляется в виде произведения $M = \Sigma \times \mathbb{R}$ для некоторой римановой поверхности Σ имеем

$$\mathcal{M}_{\Sigma, G} = \text{Hom}(\pi_1(\Sigma), G)/G.$$

Данное пространство снабжено симплектической структурой

$$\omega = \int_{\Sigma} \frac{k}{4\pi} \text{Tr}(\delta A, \delta A).$$

Парадигма геометрического квантования предоставляет возможность квантования этого симплектического пространства следующим образом: в первую очередь вводится комплексная структура на \mathcal{M} и строится линейное расслоение $\mathcal{L} \rightarrow \mathcal{M}$, пространство голоморфных сечений которого и объявляется гильбертовым пространством модели $\mathcal{H} = \Gamma(\mathcal{M}, \mathcal{L}^k)$. Оказывается, что конструкция на самом деле не зависит от выбора комплексной структуры.

Замечание 26 *Независимость от выбора комплексной структуры позволяет вычислять гильбертово пространство с помощью процедуры разрезания на штаны. Элементарное гильбертово пространство, соответствующее одним штанам, называется конформным блоком.*

Замечание 27 *Важным утверждением является теорема Нарасимхана-Сешадри, которая отождествляет пространство унитарных плоских связностей и пространство стабильных голоморфных расслоений степени 0. В этой интерпретации линейное расслоение \mathcal{L} на пространстве модулей строится, как детерминантное расслоение*

$$\mathcal{L} = \det(\ker d_A)^* \otimes \det(\text{coker } d_A).$$

12.3 Теорема Бореля-Вейля-Ботта

Данная теорема касается пространства флагов $\mathcal{F} = G/B$ связной комплексной группы Ли по борелевской подгруппе. На этом пространстве имеется каноническая симплектическая форма ω . Кроме этого, пространство флагов имеет описание в терминах компактной подгруппы K/T , где K - компактная подгруппа, а $T = K \cap B$ - картановская подгруппа K . На этом пространстве имеется тавтологическое линейное расслоение - детерминантное расслоение. Его первый класс Черна совпадает с симплектической формой.

Опишем конструкцию более подробно. Любой целый вес λ определяет G -эквивариантное голоморфное расслоение \mathcal{L}_λ на \mathcal{F} . Действительно, пусть C_λ одномерное представление B , задаваемое весом λ (это представление строится, например, если продолжить вес с картановской подалгебры на картановскую подгруппу, и затем использовать представление $T = B/U$, где U - унипотентный радикал B). Будем интерпретировать проекцию $G \rightarrow G/B$ как главное расслоение над пространством флагов \mathcal{F} со слоем B . Свяжем с этим главным расслоением линейное расслоение на \mathcal{F} посредством линейного представления C_λ . Поскольку G действует морфизмами расслоения на тотальном пространстве расслоения \mathcal{L}_λ , такое же действие индуцируется на группе когомологий пучков $H^i(G/B, \mathcal{L}_\lambda)$, в том числе на пространстве его глобальных сечений

$$\Gamma(G/B, \mathcal{L}_\lambda).$$

Собственно утверждение теоремы Бореля-Вейля состоит в следующем:

Теорема 15 Пусть λ доминантный целый вес, тогда представление, построенное выше, является неприводимым представлением G старшего веса λ , его ограничение на K является неприводимым унитарным представлением K веса λ и любое неприводимое унитарное представление получается таким способом для единственного значения λ .

Пример 14 Рассмотрим случай группы $K = SU(2)$ и ее комплексной формы $G = SL(2, \mathbb{C})$. Пространство флагов в этом случае отождествляется с комплексной проективной прямой $\mathbb{C}P^1$. Соответствующий характер на борелевской подгруппе задается формулой:

$$\chi_n \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = a^n. \quad (45)$$

Голоморфные сечения этого расслоения могут быть описаны, как голоморфные отображения

$$f : G \rightarrow \mathbb{C} : \quad f(gb) = \chi_\lambda(b)f(g).$$

Действие группы G на пространстве таких сечений определяется формулой:

$$gf(h) = f(g^{-1}h).$$

Пространство глобальных сечений линейного расслоения L_n отождествляется с пространством однородных полиномов степени n на \mathbb{C}^2 . Это пространство имеет размерность $n + 1$ и задает стандартное представление группы $SL(2, \mathbb{C})$.

12.4 Сфера с отмеченными точками

В частном случае сферы Римана C с отмеченными точками P_i , с которыми ассоциируются представления R_i группы G , пространство модулей соответствующих плоских связностей имеет следующую интерпретацию:

$$\mathcal{M}_{(G,k,P_i,R_i)} = \text{Hom}(\pi_1(C - \cup P_i), G)/G$$

здесь, кроме того, предполагается, что монодромия связности в отмеченной точке P_i лежит в фиксированном классе сопряженности u_i элементов в G . В этом случае имеется аналогичная теорема Нарасимхана-Сешадри, связывающая это пространство с пространством голоморфных расслоений.

Теорема 16 *Пространство модулей плоских связностей на поверхности Σ с проколами P_i , представлениями R_i ассоциированными с каждой точкой, и соответствующими представителями классов сопряженности $u_i \in G$ изоморфно пространству голоморфных G_C -расслоений на Σ , у которых дополнительно ограничена структурная группа до борелевской B_C в отмеченных точках P_i .*

В силу теоремы Бореля-Вейля-Ботта гильбертово пространство в этом случае представляется в виде:

$$\Gamma\left(\prod_i (G_C/B_C)_i/G_C, \mathcal{L}\right) = \Gamma\left(\prod_i (G_C/B_C)_i, \mathcal{L}\right)^{G_C} = (R_1 \otimes \dots \otimes R_s)^G.$$

В частном случае $s = 4$ для группы $G = SU(2)$ имеем:

$$\dim \mathcal{H}(C, P_1, R_1, \dots, P_4, R_4) = \dim(R \otimes R \otimes \bar{R} \otimes \bar{R})^G = 2$$

так как в этом случае

$$R \otimes R = E_1 \oplus E_2,$$

где $E_{1,2}$ симметричная и антисимметричная части в тензорном квадрате. Они не изоморфны, следовательно инвариантная часть в $(E_1 \oplus E_2) \otimes (\bar{E}_1 \oplus \bar{E}_2)$ состоит из двух одномерных подпространств $E_i \otimes \bar{E}_i$.

12.5 Теория Черна-Саймонса и топологические инварианты

Пусть $L = \cup C_i \in S^3$ - некоторое зацепление, R_i - представление $G = SU(2)$ ассоциированное компоненте C_i . Определим следующую статсумму:

$$Z(L) = \int \mathcal{D}A e^{ik/2\pi \int_{S^3} \text{Tr}(A \wedge dA + 2/3 A \wedge A \wedge A)} \prod_i \text{Tr}_{R_i} P \exp \int_{C_i} A.$$

Попробуем доказать соотношение типа Skein relation на получившуюся статсумму. Рассмотрим три зацепления, отличающиеся в малой окрестности двойной точки следующим образом: Трехмерное многообразие можно разбить на две части: шарообразная окрестность двойной точки M_R и остальная часть многообразия M_L , имеющих общую границу. Заметим, что согласно принципам квантовой топологической теории поля этим многообразиям соответствуют векторы в гильбертовых пространствах:

$$\psi \in \mathcal{H}_R, \quad \chi \in \mathcal{H}_L = \mathcal{H}_R^*,$$



причем:

$$Z(L) = (\chi, \psi).$$

Заметим, что в силу ограничения на размерность $\dim \mathcal{H}_R = 2$ соответствующие векторы ψ_+, ψ_-, ψ_0 линейно зависимы, то есть существуют некоторые константы, для которых

$$\alpha\psi_+ + \beta\psi_- + \gamma\psi_0 = 0.$$

В частности, из этого следует, что

$$\alpha Z(L_+) + \beta Z(L_-) + \gamma Z(L_0) = 0.$$

Замечание 28 В этом рассуждении существенным оказывается тот факт, что $\dim \mathcal{H}_R = 2$. Это наблюдение характерно для следующей модели квантования в терминах конструкции Бореля-Вейля-Ботта.

12.6 Теория Черна-Саймонса и теория Веса-Зумино-Виттена

Данная связь возникает в случае трехмерного многообразия $D^2 \times \mathbb{R}$. В этом случае вырождается вся топологическая нетривиальность расслоения и связности и действие может быть переписано в терминах калибровочного поля

$$L_{WZW} = \int_{\mathbb{R} \times D^2} \text{Tr}(U^{-1}dU \wedge U^{-1}dU \wedge U^{-1}dU) + \int_{\mathbb{R} \times \partial D^2} \text{Tr}(U^{-1}\partial_\phi U U^{-1}\partial_t U).$$

12.7 Связность Книжника-Замолодчикова

Система уравнений Книжника-Замолодчикова имеет вид:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z_i} - \frac{1}{K+2} \left(\sum_{j \neq i} \frac{\Omega_{ij}}{x_i - x_j} \right) \Phi = 0$$

Ее можно интерпретировать как плоскую связность на пространстве комплексных структур. Основным ее назначением является показать независимость конструкции от выбора комплексной структуры на поверхности. Рассмотрение голономии этой проективной связности также позволяет строить инварианты узлов и 3-многообразий.

12.8 ВФ-теория

Данная теория является упрощением теории Черна-Саймонса и задается действием

$$S(A, B) = \text{tr} \int_M B \wedge (dA + A \wedge A),$$

где A - 1-форма со значениями в \mathfrak{g} (точнее, связность в главном расслоении), B - 2-форма со значениями в \mathfrak{g} .

Список литературы

- [1] V.V. Prasolov, A.B. Sossinsky, *Knots, Links, Braids and 3-manifolds*, AMS 1996
- [2] W.B. Raymond Lickorish, *An Introduction to Knot Theory*, Springer, Graduate texts in mathematics 175.
- [3] S. Carter, S. Kamada, M. Saito, *Surfaces in 4-space*. Encyclopedia of Mathematical Sciences, Vol **142**, Springer 2004
S. Carter, D. Jelsovsky, S. Kamada, L. Langford, M. Saito, *Quandle cohomology and state-sum invariants of knotted curves and surfaces*. Trans. Amer. Math. Soc. **355** 2003 3947-3989.
- [4] Дринфельд В.Г., *Алгебры Хопфа и квантовое уравнение Янга-ЧБакстера* ДАН СССР. 1985. Т.**283**, с5.
- [5] N. Yu. Reshetikhin and V. G. Turaev, *Ribbon Graphs and Their Invariants Derived from Quantum Groups*, Commun. Math. Phys. **127**, 1-26 (1990)
- [6] Н. Ю. Решетихин, *Квазитреугольные алгебры Хопфа и инварианты связок*, Алгебра и анализ, 1989, том **1**, вы- пуск 2, 169Ц188
- [7] В. Г. Тураев, *Операторные инварианты связок и R- матрицы*, Изв. АН СССР. Сер. матем., 1989, том **53**, вы- пуск 5, 1073Ц1107
- [8] В. Г. Дринфельд, *О почти кокоммутативных алгебрах Хопфа*, Алгебра и анализ, 1989, том **1**, выпуск 2, 30Ц46
- [9] A. Zamolodchikov, *Tetrahedra equations and integrable systems in three-dimensional space*, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **79** (1980) 641ГЪВЦ664. [English translation: Soviet Phys. JETP **52** (1980) 325-326].
- [10] Р. Бакстер. *Точно решаемые модели в статистической механике: Пер с англ.* Ч М.: Мир, 1985
- [11] I. Korepanov, G. Sharygin, D. Talalaev, *Cohomology of the tetrahedral complex and quasi-invariants of 2-knots*, arXiv:1510.03015
- [12] D. Talalaev *Zamolodchikov tetrahedral equation and higher Hamiltonians of 2d quantum integrable systems*, SIGMA, 13 (2017), 031, arXiv:1505.06579
- [13] I. Korepanov, G. Sharygin, D. Talalaev, *Cohomologies of n-simplex relations*, [math-ph] arXiv:1409.3127
- [14] V. Manturov, I. Nikonov *On braids and groups G_n^k* , arXiv:1507.03745
- [15] J.-M. Maillet, *Lax equations and quantum groups*, Phys. Lett. B **245**, 480 (1990).
- [16] L. D. Faddeev, N. Yu. Reshetikhin, and L. A. Takhtajan. *Quantization of Lie groups and Lie algebras*. In Algebraic analysis, Vol. I, pages 129-139. Academic Press, Boston, MA, 1988.
- [17] С.П. Новиков, *Топология*, Москва.Ижевск 2002

- [18] E. Witten, *Quantum Field Theory and the Jones Polynomial*, Commun. Math. Phys. **121**, 351-399 (1989)
- [19] Sen Hu, E. Witten, *Lecture notes on Chern-Simons-Witten theory*, World Scientific 2000.
- [20] A. Cattaneo, P. Cotta-Ramusino, J. Frohlich, M. Martellini, *Topological BF theories in 3 and 4 dimensions*, hep-th/9505027
P. Mnev *Notes on simplicial BF theory*, Mosc. Math. J., 2009, **9**, N2, pp 371-410
- [21] P. Aschieri, L. Cantini, and B. Jurco, *Nonabelian bundle gerbes, their differential geometry and gauge theory*. Commun. Math. Phys., **254**: 367-400, 2005. [arxiv:hep-th/0312154]
- [22] J. Baez, U. Schreiber, *Higher Gauge Theory: 2-Connections on 2-Bundles*, arXiv:hep-th/0412325
- [23] И. Корепанов, *Геометрические кручения и топологическая теория поля в стиле Атья*, ТМФ, 2009, том 158, номер 3, 405-418
- [24] L. Onsager, *The Ising model in two dimensions*. In: Mills, R.E., Ascher, E., Jaffee, R.I. (eds.) Critical Phenomena in Alloys, Magnets and Superconductors, pp. 311-321. McGraw-Hill, New York (1971)
- [25] V. Mangazeev, V. Bazhanov, S. Sergeev, *An integrable 3D lattice model with positive Boltzmann weights*, J. Phys. A: Math. Theor., v. 46, 465206 (2013)
- [26] A. Goncharov, R. Kenyon *Dimers and cluster integrable systems* arXiv:1107.5588v2 [math.AG]
- [27] И. Кричевер, *Коммутативные кольца обыкновенных линейных дифференциальных операторов*, Функц. анализ и его прил., 1978, том **12**, выпуск 3, 201-31
- [28] N. Hitchin, *Stable bundles and integrable systems*, Duke Math. J. **54** (1987), 911-1114.
- [29] H. Kurke, D. Osipov, A. Zheglov, *Commuting differential operators and higher-dimensional algebraic varieties*, Selecta Math. (N.S.), 20:4 (2014), 1159-1195