

## Поле разложения и прочие расширения

**Задача 3.1.** Найдите размерность над  $\mathbb{Q}$  поля разложения многочлена а)  $x^4 - 2$ ;  
б)  $x^p - a$  ( $p$  простое,  $a$  не полная  $p$ -я степень).

**Задача 3.2.** У поля  $K$  характеристики  $p$  есть несепарабельные расширения тогда и только тогда, когда оно не является совершенным (т. е.  $K \neq K^p$ ).

**Задача 3.3.** Пусть  $L$  — поле разложения над  $K$  многочлена,  $d = \prod_{i < j} (x_i - x_j)$ , где  $x_i$  — корни многочлена.

а) Элемент  $D := d^2$  (дискриминант многочлена) лежит в  $K$ .

б) Найдите дискриминант многочлена  $x^3 + px + q$ .

**Задача 3.4.** а) Если  $L$  — поле разложения над  $K$  неприводимого многочлена,  $\alpha$  и  $\beta$  — какие-то корни этого многочлена, то существует автоморфизм поля  $L$ , оставляющий  $K$  на месте и переводящий  $\alpha$  в  $\beta$ .

б) Если расширение  $L/K$  конечно, то  $|\text{Aut}(L/K)| \leq [L : K]$ .