# Теория Галуа III

▷ В этом листке $p$ и $q$ — различные нечетные простые числа; $\zeta_q$ — (нетривиальный) корень степени $q$ из единицы.

**Задача 6.1.** Правильный $q$-угольник можно построить циркулем и линейкой тогда и только тогда, когда

а) круговое поле $\mathbb{Q}(\zeta_q)$ получается из $\mathbb{Q}$ последовательностью квадратичных расширений;

б) $q$ — "простое число Ферма", т. е. имеет вид $2^l+1$.

**Задача 6.2.** а) У кругового расширения $\mathbb{Q}(\zeta_q)/\mathbb{Q}$ есть ровно одно квадратичное подрасширение (будем обозначать его $\mathbb{Q}(\sqrt{q^*})$).

б) Представьте $\sqrt{q^*}$ в виде суммы степеней $\zeta_q$ с коэффициентами $\pm 1$ ("сумма Гаусса").

в) Выразите $q^*$ через $q$.

**Задача 6.3.** а) Рассмотрев действие автоморфизма Фробениуса ($x \mapsto x^p$) поля $\mathbb{F}_p(\zeta_q)$ на сумму Гаусса, докажите, что $\left(\frac{q^*}{p}\right) = \left(\frac{p}{q}\right)$; убедитесь, что это эквивалентно обычному квадратичному закону взаимности,

$$\left(\frac{p}{q}\right)\left(\frac{q}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}\cdot\frac{q-1}{2}}.$$

б) $\left(\frac{2}{p}\right) = (-1)^{\frac{p^2-1}{8}}$. Указание. Рассмотрите поле $\mathbb{F}_p(\zeta_8)$.

$$\cos\left(\frac{2\pi}{17}\right) = -\frac{1}{16} + \frac{1}{16}\sqrt{17} + \frac{1}{16}\sqrt{34-2\sqrt{17}} + \\ + \frac{1}{8}\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}-2\sqrt{34+2\sqrt{17}}}$$