Многочлены

Буквами $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ обозначают множества целых, рациональных, действительных и комплексных чисел соответственно.

Задача 1°. a) Пусть m, n — натуральные числа. Разделите с остатком многочлен $x^n - 1$ на $x^m - 1$. Найдите НОД этих двух многочленов.

b) Найдите НОД чисел $2^n - 1$ и $2^m - 1$.

Задача 2°. Пусть a, m, n — натуральные числа, $a \geqslant 2$. Найдите НОД многочленов $x^{a^n} - x$ и $x^{a^m} - x$.

Запомним ответы в задачах 1 и 2, они ещё пригодятся.

Задача 3. Разделите многочлен $(x-1)^{2017}$ с остатком на следующие многочлены:

a) $x+2$, b°) x^2-4, c°) $(x+1)^2$, d) $x(x-1)(x-2)$, e) $(x+1)^{2016}$.

В двух следующих задачах можно пользоваться Основной теоремой алгебры: любой непостоянный многочлен с комплексными коэффициентами имеет комплексный корень.

Задача 4. Многочлен $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ неприводим в $\mathbb{C}[x]$ тогда и только тогда, когда степень $P(x)$ равна 1.

Задача 5. Многочлен $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ неприводим в $\mathbb{R}[x]$ тогда и только тогда, когда степень $P(x)$ равна 1 или степень $P(x)$ равна 2 и дискриминант $P(x)$ отрицателен.

Задача 6 (Лемма Эйзенштейна). Пусть

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$$

— многочлен, $n \geqslant 1$. Предположим, что коэффициенты $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ делятся на простое число p, и a_0 не делится на p^2. Тогда многочлен $P(x)$ неприводим в $\mathbb{Z}[x]$.

Определение 1. *Содержанием* многочлена $P \in \mathbb{Z}[x]$ называется НОД всех коэффициентов P. Обозначение: $c(P)$. Многочлен с целыми коэффиценатми называется *примитивным*, если его содержание равно 1.

Задача 7° (Лемма Гаусса). a) Произведение двух примитивных многочленов примитивно. Вообще говоря, $c(PQ) = c(P)c(Q)$ для $P, Q \in \mathbb{Z}[x]$.

b) Пусть $P(x)$ — неприводимый многочлен в $\mathbb{Z}[x]$ и $\deg(P) > 0$. Тогда $P(x)$ неприводим и в $\mathbb{Q}[x]$.

Задача 8. Пусть p — простое натуральное число. Покажите, что многочлен

$$x^{p-1} + x^{p-2} + \ldots + x + 1$$

неприводим в $\mathbb{Q}[x]$. Подсказка: сделайте замену $y = x - 1$.

Задача 9. Разложите на неприводимые множители в $\mathbb{Q}[x]$ многочлен $x^n - 1$ при $1 \leqslant n \leqslant 12$.

Подсказка: доказать неприводимость многочлена $x^6 + x^3 + 1$ можно аналогично задаче 8.

Задача 10. Докажите, что многочлен $x^n - 2$ неприводим в $\mathbb{Q}[x]$.

Рекомендуемая литература к курсу

- Э. Б. Винберг. “Курс алгебры”
- А. И. Кострикин. “Введение в алгебру” (части 1,2,3)
- И. М. Гельфанд. “Линейная алгебра”
- А. И. Кострикин, Ю. И. Манин. “Линейная алгебра и геометрия”
- С. Ленг. “Алгебра”