НМУ
Алгебра 1

20 сентября 2017
Листок 2

Кольца — простейшие свойства

Полем называется множество с определёнными на нём операциями $+$ и $\cdot$ такими, что:

1. $\forall a, b, c \quad (a+b)+c = a+(b+c)$ (ассоциативность сложения);
2. $\exists 0 \quad \forall a \quad 0+a = a+0 = a$ (наличие нуля);
3. $\forall a \quad \exists(-a) \quad a+(-a) = (-a)+a = 0$ (наличие противоположного);
4. $\forall a, b \quad a+b = b+a$ (коммутативность сложения);
5. $\forall a, b, c \quad (a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c; \quad c\cdot(a+b) = c\cdot a + c\cdot b$ (дистрибутивность умножения относительно сложения);
6. $\forall a, b, c \quad (a\cdot b)\cdot c = a\cdot(b\cdot c)$ (ассоциативность умножения);
7. $\exists 1 \neq 0 \quad \forall a \quad 1\cdot a = a\cdot 1 = a$ (наличие единицы);
8. $\forall a \neq 0 \quad \exists a^{-1} \quad a\cdot a^{-1} = a^{-1}\cdot a = 1$ (наличие обратного);
9. $\forall a, b \quad a\cdot b = b\cdot a$ (коммутативность умножения).

Кольцом (ассоциативным, с единицей) называется множество с операциями $+$ и $\cdot$, удовлетворяющими аксиомам 1–7. Кольцо, в котором выполнены аксиомы 1–7 и 9, называется *коммутативным*, а в котором верны аксиомы 1–8, называется *телом*.

Задача 1. a°) Проверьте, что в любой группе единственны нейтральный элемент и обратный к данному элемент.

b) В коммутативной группе определите вычитание. Проверьте, что разность существует и единственна.

c°) Проверьте, что в любом кольце выполнено равенство $0\cdot x = x\cdot 0 = 0$ при всех x.

d) Проверьте какие-нибудь стандартные правила арифметики в произвольном поле/кольце. Например:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}; \quad a-(b+c) = a-b-c; \quad \ldots$$

Задача 2°. Пусть R — коммутативное кольцо без делителей нуля. Проверьте, что отношение

$$\frac{a}{b} \sim \frac{c}{d}, \quad \text{если} \quad ad = bc$$

на множестве дробей вида a/b, где $a, b \in R, b \neq 0$, является отношением эквивалентности. Соответствующее множество классов эквивалентности обозначается $\operatorname{Frac} R$.

Задача 3°. Проверьте, что операции a) $[\frac{a}{b}] + [\frac{c}{d}] := [\frac{ad+bc}{bd}]$, $[\frac{a}{b}]\cdot[\frac{c}{d}] := [\frac{ac}{bd}]$ на $\operatorname{Frac} R$ корректно определены.

b) Проверьте, что $\operatorname{Frac} R$ с введёнными операциями является полем.

Задача 4. Проверьте, что гомоморфизм $R \to \operatorname{Frac} R$, переводящий $x \in R$ в класс дроби $[x/1]$, является изоморфизмом тогда и только тогда, когда R является полем.

Задача 5. a) Пусть R — конечное коммутативное кольцо. Докажите, что R — поле тогда и только тогда, когда в R нет делителей нуля.

b) При каких натуральных m кольцо $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ остатков от деления на m является полем? имеет делители нуля?

Задача 6. Покажите, что любой гомоморфизм полей есть вложение.