НМУ
Алгебра 1

18 октября 2017
Листок 6

Симметрическая группа

Перестановкой множества X называется взаимно-однозначное отображение $X \to X$. Перестановки множества X образуют группу относительно композиции отображений. Группа перестановок множества $\{1, 2, \dots, n\}$ называется *симметрической группой* и обозначается S_n. Перестановки часто записывают в виде таблицы:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Циклом $(i_1, i_2, \dots, i_k)$ называется перестановка σ, переводящая i_s в i_{s+1} при $1 \leqslant s \leqslant k-1$, i_k в i_1 и оставляющая остальные числа на месте. *Транспозицией* называется цикл длины 2.

Задача 1. a) Покажите, что любая перестановка σ разлагается в произведение непересекающихся циклов единственным образом: $\sigma = \sigma_1 \cdot \ldots \cdot \sigma_r$.

b) Зная длины $m_1, \dots, m_r$ циклов $\sigma_1, \dots, \sigma_r$, найдите порядок σ.

c°) Сколько перестановок в S_n коммутируют с σ?

d°) Покажите, что две перестановки σ и τ сопряжены (т.е. $\tau = g\sigma g^{-1}$ при некотором $g \in S_n$) $\Longleftrightarrow$ наборы длин циклов в разложениях σ и τ совпадают.

Задача 2. Докажите, что любая перестановка представляется в виде произведения

a) транспозиций вида $(1, i)$;

b) транспозиций вида $(i, i+1)$;

c) транспозиций $(1, 2)$ и циклов $(1, 2, \dots, n)$.

Беспорядком в перестановке $\sigma \in S_n$ называется пара (i, j), такая что $1 \leqslant i < j \leqslant n$ и $\sigma(i) > \sigma(j)$. Перестановка называется (не)чётной, если число беспорядков в ней (не)чётно. Обозначение: $(-1)^\sigma$ или $\mathrm{sign}(\sigma) \in \{\pm 1\}$. Множество чётных перестановок обозначается A_n.

Задача 3. a°) Покажите, что произведение чётного числа транспозиций чётно, а нечётного — нечётно.

b°) Пусть известны чётности σ_1 и σ_2. Чему равны чётности σ_1^{-1}, $\sigma_1\sigma_2$? Покажите, что чётность определяет гомоморфизм $\mathrm{sign}\colon S_n \to \{\pm 1\}$.

c) Чему равна чётность цикла длины k? Сколько в S_n чётных перестановок?

Задача 4. Докажите, что любая чётная перестановка представляется в виде произведения

a) циклов длины 3;

b) пар непересекающихся транспозиций (при $n \geqslant 5$).

Обозначим через a_k^n количество перестановок в S_n с k беспорядками. Пусть $F_n(x) = \sum_k a_k^n x^k$.

Задача 5. a) Разложите многочлен F_n на множители.

b) Покажите, что $F_n(x) = x^{n(n-1)/2} F_n(1/x)$.

c) Фиксируем n. При каком k достигает максимума a_k^n?

Задача 6. Покажите, что:

a) группа S_3 изоморфна группе движений правильного треугольника;

b°) группа S_4 изоморфна группе движений правильного тетраэдра и группе вращений куба;

c) группа $S_4 \times S_2$ изоморфна группе всех движений куба;

d) группа A_5 изоморфна группе вращений додекаэдра. Подсказка: впишите в додекаэдр 5 тетраэдров.

e) Постройте сюръективный гомоморфизм $S_4 \to S_3$.

Задача 7. Расставим нумерованные тома на полке по порядку. Будем брать любой том, стоящий не на своём месте, и ставить его на правильное место, не меняя относительного порядка других книг. Всегда ли удастся таким образом упорядочить все тома?

Задача 8. Какие конфигурации фишек можно получить в игре “пятнашки”?