НМУ
Алгебра 1

1 ноября 2017
Листок 8

Строение конечных групп

В этом листке G будет обозначать конечную группу.

Задача 1°. Пусть $\operatorname{ord} g = 2$ при всех $g \in G, g \neq e$. Покажите, что G абелева.

Задача 2. Покажите, что любая подгруппа индекса 2 нормальна.

Задача 3. Пусть $H \subset G$ — подгруппа порядка p, где p — простое число, и $|G| < p^2$. Покажите, что H нормальна. Подсказка: рассмотрите действие H на множестве левых смежных классов G/H левыми сдвигами.

Определение 1. *Центр* группы G — это множество $Z(G) = \{g \in G \mid \forall h \in G\ gh = hg\}$. *Централизатором* элемента $g \in G$ называется множество $Z(g) = \{x \in G \mid xg = gx\}$. *Нормализатором* подгруппы $H \subset G$ называется множество $N_G(H) = \{g \in G \mid gHg^{-1} = H\}$.

Задача 4. a) Проверьте, что центр, централизатор и нормализатор — подгруппы в G и что $Z(G) \subset N_G(H)$, $Z(G) \subset Z(g)$. Проверьте, что H — нормальная подгруппа в $N_G(H)$, и $Z(G)$ — нормальная подгруппа в G. Проверьте, что $hZ(g)h^{-1} = Z(hgh^{-1})$.

b) Покажите, что количество подгрупп, сопряжённых с H, делит индекс H.

Определение 2. Пусть p — простое число. *p-группой* называется группа, порядок которой есть степень числа p.

Задача 5. $a°$) Докажите, что центр p-группы нетривиален.

b) Покажите, что любая группа порядка p^2 абелева.

Определение 3. Пусть p — простое число, а G — группа порядка $p^k m$, где $(m,p) = 1$. *Силовской p-подгруппой* в G называется любая подгруппа $H \subset G$ порядка p^k.

Задача 6 (Первая теорема Силова). Докажите, что силовские p-подгруппы существуют для любой группы G и любого p. Подсказка: проведите индукцию по порядку G. Рассмотрите два случая: когда существует класс сопряжённости, число элементов в котором > 1 и взаимно просто с p, и когда такого класса нет. Во втором случае постройте элемент в $Z(G)$ порядка p.

Задача 7 (Вторая теорема Силова). Докажите, что все силовские p-подгруппы сопряжены друг другу. Подсказка: рассмотрите действие H_1 левыми сдвигами на G/H_2 и найдите в нём неподвижную точку.

Задача 8 (Третья теорема Силова). Пусть G — группа порядка $p^k m$, где $(m,p) = 1$. Докажите, что число силовских p-подгрупп в G сравнимо с 1 по модулю p и делит m.
Подсказка: действие H сопряжениями на множестве силовских подгрупп имеет единственную неподвижную точку — H.
Если H' — другая неподвижная точка, рассмотрите $N_G(H')$.

Задача 9. Классифицируйте с точностью до изоморфизма все конечные группы порядка n при
$a°$) $n \leqslant 8$;
b) $n \leqslant 12$.

Ответ представлен в следующей таблице:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
абелевы	2	3	$4, 2{\times}2$	5	6	7	$8, 4{\times}2, 2{\times}2{\times}2$	$9, 3{\times}3$	10	11	$12,\ 6{\times}2$
неабелевы					S_3		$D_4, Q_8,$		D_5		$D_6, A_4, \langle a\rangle_3 \leftthreetimes \langle b\rangle_4$

Здесь a обозначает $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z}$, $a \times b$ обозначает $\mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$, а *группа диэдра D_n* — это группа симметрий правильного n-угольника. *Кватернионная группа Q_8* есть $\{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ с умножением $i^2 = j^2 = k^2 = -1, ij = -ji = k, jk = -kj = i, ki = -ik = j$.