2. Вторая лекция, 18 сентября 2017 г.

Цель этой лекции — доказать трансцендентность чисел e и π. Мы будем в основном следовать книге Феликса Клейна “Элементарная математика с точки зрения высшей”, том 1.[1]

2.1. **Трансцендентность e.**

Теорема 2.1. *Число e не является корнем многочлена с целыми коэффициентами.*

Доказательство. Предположим противное: пусть существуют такие $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$, что

$$a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \dots + a_n e^n = 0. \qquad (*)$$

Идея доказательства будет состоять в следующем: домножим равенство $(*)$ на подходящее число и докажем, что результат представляется в виде суммы ненулевого целого числа и малого «довеска» (по модулю меньшего 1). Это приведёт нас к противоречию.

Для начала вычислим следующий интеграл (известный как гамма-функция):

Предложение 2.2. *Для любого натурального k справедливо равенство*

$$\int_0^\infty e^{-z} z^k dz = k!.$$

Доказательство. Проинтегрируем по частям k раз. $\square$

Следующее выражение называется *интегралом Эрмита*:

$$I = \int_0^\infty := \int_0^\infty e^{-z} z^{k-1} \left[(z-1)(z-2)\dots(z-n)\right]^k dz.$$

Предложение 2.3. *I есть целое число, кратное $(k-1)!$. Более того, имеет место сравнение*

$$I/(k-1)! \equiv (-1)^{nk}(n!)^k \mod k.$$

Доказательство. Это следует из предыдущего предложения и из того, что подынтегральное выражение есть e^{-z}, умноженное на многочлен от z, младший моном которого имеет вид $(-1)^{nk}(n!)^k z^{k-1}$ (остальные мономы имеют степень k и выше, т.е. при интегрировании дают целые кратные $k!$). $\square$

Домножим левую часть выражения $(*)$ на I; результат равен сумме двух слагаемых, P_1 и P_2, где

$$P_1 = a_0 \int_0^\infty + a_1 e \int_1^\infty + a_2 e^2 \int_2^\infty + \dots + a_n e^n \int_n^\infty,$$

[1] См. также посты юзера `falcao` в LiveJournal:
`http://virtual-ium.livejournal.com/22252.html`,
`http://virtual-ium.livejournal.com/22404.html`

$$P_2 = a_1 e \int_0^1 + a_2 e^2 \int_0^2 + \dots + a_n e^n \int_0^n .$$

По предыдущему предложению, первое из слагаемых, входящих в P_1, кратно $(k-1)!$, причем частное сравнимо по модулю k с $\pm a_0 (n!)^k$. Все остальные слагаемые кратны $k!$. Действительно, при $0 < m \leq n$

$$a_m e^m \int_m^\infty = a_m \int_m^\infty e^{-(z-m)} f_m(z) dz,$$

где $f_m(z)$ — многочлен с целыми коэффициентами, имеющий в $z = m$ корень кратности k. Стало быть, этот интеграл кратен $k!$. Поэтому $P_1/(k-1)!$ всегда будет целым числом.

Более того, найдётся такое достаточно большое k (также можно выбрать k простым, но не обязательно), что $P_1/(k-1)!$ будет целым числом, отличным от 0 — т.к. $\pm a_0 (n!)^k$ отлично от нуля по модулю k.

Теперь оценим $P_2/(k-1)!$. Здесь хватит самой грубой оценки интеграла при помощи максимума подынтегральной функции. Пусть $M = \max_{[0,n]} z(z-1)(z-2)\dots(z-n)$, а также $m = \max_{[0,n]} e^{-z}(z-1)\dots(z-n)$. Тогда

$$|P_2| \leq (|a_0| + |a_1| e + 2|a_2| e^2 + \dots + n|a_n| e^n) m M^k.$$

Значит, при больших k величину $P_2/(k-1)!$ можно сделать сколь угодно малой (т.к. $c^k/k! \to 0$ при $k \to \infty$) — то есть найдётся такое k, что $|P_2/(k-1)!| < 1$. При этом $P_1/(k-1)!$ — целое число, отличное от нуля. Но $P_1 + P_2 = 0$. Противоречие. □

2.2. **Трансцендентность π.** Линдеман доказал более общий результат, из которого следует трансцендентность π.

Теорема 2.4 (Линдеман)**.** *Пусть $b_1, \dots, b_n$ — различные алгебраические числа. Тогда $e^{b_1}, \dots, e^{b_n}$ линейно независимы над $\overline{\mathbb{Q}}$.*

Его доказательство мы в курсе не приводим. Но из этой теоремы сразу следует трансцендентность π: действительно, если π было бы алгебраично, то алгебраично было бы и $i\pi$, так что равенство $1 + e^{i\pi} = 0$ противоречило бы теореме Линдемана. Мы докажем трансцендентность π непосредственно, методом, похожим на приведенное выше доказательство трансцендентности e.

Теорема 2.5. *Число π трансцендентно.*

Доказательство. Предположим, что π алгебраично. Значит, алгебраично и $i\pi$. Пусть $i\pi$ является корнем многочлена $h(z) = cz^m + \dots \in \mathbb{Z}[z]$. Обозначим через $\beta_1, \dots, \beta_n$ все корни этого многочлена; будем считать, что $\beta_1 = i\pi$.

Рассмотрим выражение $(1+e^{\beta_1})\dots(1+e^{\beta_m})$. Оно равно нулю (т.к. $1 + e^{\beta_1} = 0$). Стало быть,

$$1 + e^{\beta_1} + \dots + e^{\beta_n} + e^{\beta_1+\beta_2} + \dots + e^{\beta_1+\dots+\beta_m} = 0.$$

Некоторые из показателей степени могут быть равны нулю (более того, так и будет, так как среди β_j есть число $-i\pi$). Обозначим через $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ не равные нулю показатели степени в этом равенстве (то есть суммы некоторых из $\beta_1, \ldots, \beta_m$). Наше равенство перепишется в виде

$$A + e^{\alpha_1} + \cdots + e^{\alpha_n} = 0, \qquad (**)$$

где A — целое положительное число. Докажем, что такое равенство невозможно.

Начнем со следующего замечания, следующего из известных фактов о симметрических многочленах. Во-первых, по теореме Виета всякий симметрический многочлен с целыми коэффициентами от $c\beta_1, \ldots, c\beta_m$ будет целым числом. Во-вторых, то же самое верно и про любой симметрический многочлен с целыми коэффициентами от $c\alpha_1, \ldots, c\alpha_n$. Действительно, если бы среди всевозможных сумм β_i не было бы нулевых, то это следовало бы из основной теоремы о симметрических многочленах. Но если положить в симметрическом многочлене некоторые из переменных равными нулю, то получится симметрический многочлен от остальных переменных. Следовательно, всякий симметрический многочлен от $c\alpha_1, \ldots, c\alpha_n$ также выражается через элементарные симметрические многочлены от $c\beta_1, \ldots, c\beta_m$.

Принцип доказательства трансцендентности $i\pi$ будет тем же, что и для e. Домножим равенство $(**)$ на интеграл $I = \int_0^\infty e^{-z} f(z)dz$, где $f(z)$ — некоторый многочлен, который мы подберем позже. Промежуток интегрирования можно разбить на два:

$$I = \int_0^a e^{-z} f(z)dz + \int_a^\infty e^{-z} f(z)dz = a\int_0^1 e^{-az} f(az)dz + e^{-a}\int_0^\infty e^{-z} f(z+a)dz.$$

(мы сделали в первом интеграле замену $z \mapsto az$, а во втором — $z \mapsto z + a$).

Заметим, что подынтегральные выражения голоморфны в $\mathbb{C}$, так что a может быть комплексным, и все интегралы тогда определены корректно. Будем придавать a значения $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Умножим $(**)$ на I, раскроем скобки и применим к каждому из слагаемых указанное выше преобразование:

$$\begin{aligned}&(A + e^{\alpha_1} + \cdots + e^{\alpha_n})I = \\ &\qquad = \left[A\int_0^\infty e^{-z} f(z)dz + \sum_{i=1}^n \int_0^\infty e^{-z} f(z+\alpha_i)dz\right] + \\ &\qquad\qquad + \left[\sum_{i=1}^n \alpha_i e^{\alpha_i}\int_0^1 e^{-\alpha_i z} f(\alpha_i z)dz\right].\end{aligned}$$

Обозначим выражение в первых квадратных скобках через P_1, а во вторых — через P_2.

Пусть $\|f\|$ — это максимум многочлена $f(z)$ на круге с центром в нуле и радиусом $R = \max_i |\alpha_i|$. Тогда $|P_2| = O(\|f\|)$.

Выберем многочлен $f(z)$ так: $f(z) = g(z)/(k-1)!$, где

$$g(z) = c^{kn+k-1} z^{k-1} \left[(z-\alpha_1)\dots(z-\alpha_n)\right]^k .$$

Тогда $g(z)$ будет симметрическим многочленом от $c\alpha_1, \dots, c\alpha_n$, то есть будет иметь целые коэффициенты. При этом в нуле у него будет нуль кратности $k-1$.

Поэтому $\int_0^\infty e^{-z} f(z) dz$ будет целым числом, которое при достаточно больших простых k будет отлично от нуля по модулю k (т.к. младший коэффициент $g(z)$ не делится на $k!$. Напротив, многочлен $\sum f(z+\alpha_i)$ будет иметь целые коэффициенты, и в нуле у него будет корень кратности не ниже k. Так что $\sum_{i=1}^n \int_0^\infty e^{-z} f(z+\alpha_i) dz$ будет целым числом, делящимся на k. Стало быть, при подходящем достаточно большом k число P_1 будет целым ненулевым. Напротив, $\|f\| \le B^k/(k-1)!$ для некоторой константы B, поэтому при больших k значение $\|f\|$ (а, стало быть, и $|P_2|$) можно сделать сколь угодно малым. Поэтому $P_1 + P_2$ будет отлично от нуля. Противоречие.

$\square$

E-mail address: `esmirnov@hse.ru`