НМУ, I курс, 04.09.2017

Листок 1.

Индукция

Задача 1. Докажите неравенство Бернулли

$$(1+x)^n \geq 1+nx,$$

где n – натуральное число и $x \geq -1$.

Задача 2. На какое число частей делят пространство n плоскостей, которые проходят через одну точку и никакие три не проходят через одну прямую?

Задача 3. Представьте произвольное натурально число в виде выражения, в запись которого входят только три двойки и произвольные математические знаки.

Биекции

Задача 4. Пусть множество $A \cup B$ равномощно отрезку $[0,1]$. Докажите, что хотя бы одно из множеств A или B равномощно отрезку $[0,1]$.

Задача 5. Докажите, что

(a) существует биекция $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вида $f(x,y) = h(\varphi(x)+\psi(y))$;

(b) существует биекция $f\colon \mathbb{R}\times\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ вида $f(x,y) = \varphi(x)+\psi(y)$.

Задача 6. Существует ли строго возрастающая биекция множества целых чисел $\mathbb{Z}$ на множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$?

Отношение порядка

Задача 7. Шеренга новобранцев стоит перед старшиной. Старшина командует: налево! Некоторые новобранцы поворачиваются налево, а некоторые — направо. После этого каждую секунду происходит следующее: если солдаты оказались лицом друг к другу, то они поворачиваются кругом. Докажите, что рано или поздно повороты закончатся.

Задача 8. Докажите, что всякий частичный порядок на конечном множестве можно продолжить до линейного.

Задача 9. Укажите линейный порядок на множестве векторов плоскости, согласованный с операциями сложения векторов и умножения их на скаляр.

Отношение эквивалентности

Задача 10. Докажите, что если некоторое множество A разбито на непересекающиеся подмножества, то отношение «лежать в одном подмножестве» является отношением эквивалентности; всякое отношение эквивалентности можно так задать.

Задача 11. Сколько различных отношений эквивалентности можно задать на множестве из пяти элементов?

Если на множестве A задано отношение эквивалентности $\sim$, то подмножества вида $\{b\colon b \sim a\}$ называются *классами эквивалентности*, а множество, состоящее из всех таких классов, называется фактор множеством $A/\sim$.

Задача 12. В следующих примерах опишите фактор множество $A/\sim$ и дайте его геометрическую интерпретацию:

(a) $A = \mathbb{Q}$ и $a \sim b$ тогда и только тогда, когда найдется $c \neq 0$ такое, что $a = bc$;

(b) $A = \{-1,1\}\times[0,1]$, и $(x,t)\sim(y,s)$ тогда и только тогда, когда $t=s=1$ или $t=s=0$ или $x=y, t=s$.

(c) $A = \{-1,1\}\times[0,1]\times\{-1,1\}$, и $(x,t,z)\sim(y,s,v)$ тогда и только тогда, когда $t=s=1, z=v$ или $t=s=0, x=y$ или $x=y, t=s, z=v$;

(d) $A=[0,1]\times[0,1]$ и $(x,t)\sim(y,s)$ тогда и только тогда, когда $x=y$ и $t,s\in\{0,1\}$ или $x,y\in\{0,1\}$ и $t=s$;

(e) $A=[0,1]\times[0,1]$ и $(x,t)\sim(y,s)$ тогда и только тогда, когда $x=1-y$ и $t=0, s=1$ или $x=1-y$ и $t=1, s=0$ или $x=y, t=s$.