НМУ, I курс, 11.09.2017

Листок 2.

Вещественные числа

Аксиома полноты: любые два непустых множества, одно из которых лежит левее другого на числовой оси, можно разделить точкой.

Задача 1. Докажите, что на множестве бесконечных десятичных дробей выполняется аксиома полноты.

Задача 2. Докажите существование и иррациональность числа $\sqrt{5}$.

Задача 3. Используя Аксиому Архимеда о неограниченности множества натуральных чисел докажите, что во всяком непустом интервале существует рациональное число. Докажите, что всякий набор попарно непересекающихся интервалов на числовой прямой является или конечным или счетным.

Задача 4. Заяц прыгает по окружности против часовой стрелки прыжками одинаковой длины, причем никогда не попадает в свой след. Окружность пересекает узкий ручеек. Докажите, что рано или поздно заяц наступит лапой в ручей.

Задача 5. Точки плоскости с целочисленными координатами окружены кружками радиуса 10^{-2017}. Докажите, что всякая прямая проходящая через начало координат пересекает еще a) хотя бы один кружок, b) бесконечно много кружков.

Задача 6. Может ли периодическая непостоянная функция иметь одновременно период 1 и $\sqrt{2}$? А "хорошая" непостоянная функция? Выясните, при каких значениях λ функция $\sin(\pi x) + \sin(\lambda \pi x)$ является периодической.

Комплексные числа

Задача 7. Объясните чем плохи «числа» вида $a+be$, сложение и умножение которых определяется также как и в комплексных числах, с единственным отличием $e^2 = 1$?

Задача 8. Докажите, что на $\mathbb{C}$ нельзя определить линейный порядок, согласованный с операциями сложения и умножения.

Задача 9. Вычислите сумму $q \sin x + q^2 \sin 2x + \ldots + q^n \sin nx$.

Задача 10. (a) Какое движение плоскости задает отображение $z \to Az + B$, где $A, B \in \mathbb{C}$ и $|A| = 1$?

(b) Задайте с помощью отображения $z \to Az + B$ поворот на угол $\pi/6$ с центром в точке $(1, 1)$.

(c) Докажите, что отображение $z \to 1/\overline{z}$ (инверсия) переводит множество всех окружностей и прямых на плоскости в себя.

Задача 11. Изобразите на плоскости множества:

$$a)\, |z - a| \le 1, \quad b)\, \left|\frac{z-1}{z+1}\right| = 1, \quad c)\, |z| = \sin(3\varphi), \quad d)\, |z| = e^{-\varphi},$$

где $z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, $\varphi \in [0, 2\pi)$.

Задача 12. Изобразите на плоскости множество $\sqrt[n]{1}$. Найдите ошибку в следующем доказательстве

$$1 = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = i^2 = -1.$$