Листок 3.

Задача 1. Докажите, что следующие утверждения эквивалентны:

(a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$;

(b) во всякой окрестности точки a содержатся все члены последовательности a_n начиная с некоторого номера;

(c) во всякой окрестности точки a содержатся все члены последовательности a_n кроме быть может конечного числа.

Задача 2. Докажите, что
a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$, при $|q| < 1$; c) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n+3} - \sqrt{n+1} = 0$ d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{q} = 1$.

Задача 3. Докажите, что у следующих последовательностей нет предела:
a) $a_n = 1 + (-1)^n$; b) $a_n = \sin\frac{\pi n}{3}$; c) $a_n = n^{(-1)^n}$; d) $a_n = \cos n$.

Задача 4. Пусть $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} = a.$$

Верно ли обратное?

Задача 5. Пусть $a_n > 0$ и $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. Докажите, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n} = a.$$

Верно ли обратное?

Задача 6. (Теорема Штольца) Предположим, что a_n возрастающая последовательность положительных чисел, причем $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$. Докажите, что для всякой последовательности b_n из существование предела $\lim_{n\to\infty} \frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n} = A$ следует существование предела $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} = A$. (Указание: достаточно доказать при $A = 0$.)

Задача 7. Пусть k – натуральное число. Докажите, что

(a) $\lim_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{n}}{\ln n} = 1$,

(b) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$,

(c) $\lim_{n\to\infty} \frac{1^k+2^k+\ldots+n^k}{n^k} - \frac{n}{k+1} = \frac{1}{2}$.

Задача 8. Докажите, что a) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^k}{q^n} = 0$ при $q > 1$; b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q^n}{n!} = 0$;
и выведите из a) и b) равенства: c) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n^\delta} = 0$ при $\delta > 0$; d) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$;

Задача 9. Пусть $a > 0$. Докажите, что последовательность x_n такая, что

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\big(x_n + \frac{a}{x_n}\big),$$

сходится к $\sqrt{a}$. Оцените скорость сходимости.

Задача 10. Общежитие и университет находятся на разных концах одной улицы. Студент вышел из общежития и пошел по прямой к университету. На половине пути он решил вернуться в общежитие и пошел обратно. На пол дороги к общежитию он подумал, что хорошо бы все-таки сходить в университет и пошел к университету. На пол пути к университету он опять развернулся к общежитию и т.д. К какой точке улицы будет приближаться студент?

Задача 11. Золотое сечение строится следующим образом: от прямоугольника отрезают квадрат так, что оставшийся прямоугольник подобен исходному. Найдите отношение сторон исходного прямоугольника. Будем теперь продолжать отрезать от получающихся прямоугольников квадраты двигаясь против часовой стрелки. К какой точке исходного прямоугольника приближаются квадраты?

Задача 12. (a) Что выгоднее (и во сколько раз), когда банк начисляет 100% в конце года или когда банк начисляет 10% десять раз в год?

(b) Докажите существование $\lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^n$. Этот предел называют числом e.

(c) Докажите, что для всякого n найдется число $\theta_n \in (0, 1)$ такое, что

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \ldots + \frac{1}{n!} + \frac{\theta_n}{n!n}.$$

Выведите из этого равенства, что e иррациональное число.