

p-адические числа

Пусть p – простое число. Если $a \in \mathbb{Z}$ и $a = p^k a'$, где $m \geq 0$ и $(a', p) = 1$, то $|a|_p = p^{-k}$. По определению $|0|_p = 0$ и $|a/b|_p = |a|_p/|b|_p$. Поле p -адических чисел – пополнение поля рациональных чисел \mathbb{Q} относительно нормы $|\cdot|_p$.

Задача 0. Проверьте, что $|ab|_p = |a|_p|b|_p$ и $|a + b|_p \leq \max\{|a|_p, |b|_p\}$. Докажите, что в \mathbb{Q}_p если два интервала пересекаются, то один является частью другого.

Задача 1. Найдите (а) $|p!|_p$ (б) $|n!|_p$.

Задача 2. Пусть r_n – фундаментальная (относительно $|\cdot|_p$) последовательность рациональных чисел. Докажите, что $|r_n|_p \rightarrow 0$ или $|r_n|_p = |r_N|_p$ для некоторого N и всех $n > N$.

Далее полагаем $|a|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} |r_n|_p$, где r_n – последовательность Коши, определяющая $a \in \mathbb{Q}_p$.

Задача 3. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится в \mathbb{Q}_p тогда и только тогда, когда последовательность $|a_n|_p$ стремится к нулю; последовательность a_n сходится тогда и только тогда, когда $|a_{n+1} - a_n|_p$ стремится к нулю.

Задача 4. Докажите, что ряды (а) $\sum_{n=1}^{\infty} p^n$ и (б) $\sum_{n=1}^{\infty} n!n$ сходятся в \mathbb{Q}_p и найдите их суммы.

Задача 5. Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $(k, p) = 1$. Докажите, что $a_n = k^{p^n}$ сходится в \mathbb{Q}_p к некоторому α . Докажите, что $\alpha^{p-1} = 1$.

Задача 6. Пусть $k \in \mathbb{N}$. Докажите, что для всякого рационального числа a с $|a|_p \leq 1$ найдется единственное целое число $\alpha_k \in \{0, 1, 2, \dots, p^k - 1\}$ такое, что $|a - \alpha_k|_p \leq p^{-k}$. (Указание: $a = m/n$, где $(n, p) = 1$, и значит $m = sn + tp^k$ и $|a - s|_p \leq p^{-k}$.)

Задача 7. Докажите, что последовательность $a_n = 1/n$ не сходится в \mathbb{Q}_p . Докажите, что множество $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ всюду плотно в $\{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \geq 1\}$.

Задача 8. Докажите, что всякое p -адическое число a единственным образом представляется в виде ряда

$$a = c_{-m}p^{-m} + \dots + c_0 + c_1p + c_2p^2 + c_3p^3 + \dots, \quad c_k \in \{0, 1, \dots, p-1\}, a_{-m} \neq 0.$$

Далее по аналогии с бесконечными десятичными дробями, представляющими вещественные числа, записываем p -адические числа в виде $\dots c_2c_1c_0, \dots c_{-m}$. Такая запись называется каноническим p -адическим разложением числа.

Задача 9. Найдите каноническое разложение

(а) 35 в \mathbb{Q}_5 , (б) $6!$ в \mathbb{Q}_3 , (с) $1/2$ в \mathbb{Q}_p .

Задача 10. p -адическое число a имеет каноническое разложение $\dots c_2c_1c_0, \dots c_{-m}$. Найдите каноническое разложение для $-a$.

Задача 11. Найдите четыре цифры канонического разложения числа

(а) $\dots 1246 \times \dots 6003$ в \mathbb{Q}_7 , (б) $1 : \dots 1323$ в \mathbb{Q}_5 , (с) $900 - \dots 312, 3$ в \mathbb{Q}_{11} .

Задача 12. Существуют ли $\sqrt{6}$ и $\sqrt{7}$ в \mathbb{Q}_5 ?