НМУ, I курс, 02.10.2017

Листок 4.

Задача 1. Пусть $|q| < 1$. Докажите сходимость и найдите суммы:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$, (b) $\sum_{n=0}^{\infty} nq^n$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$, (d) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$. (e) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n}{10^n}$, где f_n – числа Фибоначчи, т. е. $f_1 = 1$, $f_2 = 1$ и $f_{n+2} = f_n + f_{n+1}$.

Задача 2. Пусть последовательность a_n убывает к нулю. Докажите, что ряды $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ сходятся и расходятся одновременно. Исследуйте сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$.

Положим

$$y_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln(n+1), \quad z_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n$$

Задача 3. Докажите, что

(a) y_n не убывает, а z_n не возрастает; (b) $z_n - y_n \le 1/n$;

(c) существует число $C > 0$ такое, что $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} = \ln n + C + \varepsilon_n$, где $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

(d) докажите (действуя по аналогии с пунктами (a)–(c)), что найдется число C такое, что

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{n+1} + C + \varepsilon_n,$$

где $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

Задача 4. Колоду игральных карт (длина каждой равна 10 см) кладут на край стола и сдвигают относительно друг друга так, чтобы образовался выступ возможно большей длины. Края карт должны быть параллельны краю стола. Найдите длину наибольшего выступа, если в колоде n карт.

Задача 5. Вы держите один конец резинового шнура длиной 1 км. От второго его конца, который закреплен, к вам со скоростью 1 см/с ползет жук. Каждый раз, как только он проползает 1 см, вы удлиняете резинку на 1 км. Доползет ли жук до вашей руки? Если да, то оцените сколько ему потребуется времени?

Задача 6. Докажите, что следующие ряды сходятся:

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{(2n-1)\cdot(2n+1)}$, (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n-1) - \cos n}{n+1}$.

Задача 7. Докажите, что из сходимости $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ следует сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, но обратное неверно.

Задача 8.(Признак Лейбница) Пусть последовательность a_n монотонно убывает к нулю. Докажите, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ сходится.

Задача 9. (Теорема Римана) Предположим, что ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, но ряд $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится (в этом случае говорят, что ряд сходится условно). Докажите, что переставляя члены ряда можно получить любую наперед заданную сумму. Возможно ли такое в случае, когда ряд из модулей сходится?

Задача 10. Приведите пример ряда $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ такого, что для всякого числа A существует возрастающая последовательность номеров n_k, для которой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{j=n_k+1}^{n_{k+1}} a_j \Big)$$

сходится к числу A.

Задача 11. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится. Верно ли, что

(a) сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$, (b) сходится ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^3$?

Задача 12. Пусть ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится и $a_n > 0$. Докажите, что найдется такая неубывающая последовательность c_n, что $\lim_{n\to\infty} c_n = +\infty$ и ряд $\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n$ сходится.