НМУ, I курс, 16.10.2017

Листок 5.

Топология вещественной прямой.

Множество на прямой называется *открытым*, если вместе с каждой своей точкой оно содержит и некоторый интервал, включающий эту точку. Множество на прямой называется *замкнутым*, если его дополнение – открытое множество.

Задача 1. Докажите, что пересечение конечного числа и объединение любого семейства открытых множеств открыто. Покажите, что пересечение счетного семейства открытых множеств может быть не открыто. Докажите, что объединение конечного числа и пересечение любого семейства замкнутых множеств замкнуто. Покажите, что объединение счетного семейства замкнутых множеств может быть не замкнуто.

Задача 2. Для всякого $A \subset \mathbb{R}$ докажите, что множество его предельных точек и множество его граничных точек замкнуты.

Задача 3. Из некоторого множества на прямой удалили все его изолированные точки, затем из того множества, которое получилось, опять удалили все изолированные точки и т.д. Возможно ли проделать такую процедуру бесконечное число раз, причем так, что каждый раз найдется, что удалить?

Задача 4. (a) Докажите, что любое открытое множество на прямой – это объединение не более, чем счетного семейства непересекающихся интервалов.

(b) Докажите, что всякое замкнутое множество является пересечением не более чем счетного числа открытых множеств.

Задача 5.

(a) Пусть $A \subset \mathbb{R}$ является объединением некоторого семейства попарно непересекающихся отрезков. Может ли так быть, что в любом интервале прямой есть точка из A?

(b) Является ли вся прямая объединением некоторого семейства попарно непересекающихся отрезков?

Задача 6. Пусть $a_k > 0$ и $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \to \infty$. Кроме того, пусть $\lim_k a_k = 0$. Найдите множество частичных пределов последовательности дробных частей $b_n = \{\sum_{k=1}^{n} a_k\}$.

Задача 7. Докажите, что множество частичных пределов ограниченной последовательности, расстояние между соседними членами которой стремится к нулю, является либо точкой, либо отрезком.

Задача 8. Докажите, что множество частичных пределов последовательности является замкнутым множеством и всякое замкнутое множество является множеством частичных пределов некоторой последовательности.

Задача 9. Докажите, что прямую нельзя представить в виде объединения двух непустых и непересекающихся открытых множеств или двух непустых и непересекающихся замкнутых множеств. Опишите все подмножества прямой, каждое из которых являются одновременно открытым и замкнутым множеством.

Множество A на прямой называется *нигде не плотным*, если для любого интервала $I \subset \mathbb{R}$ найдется интервал $I' \subset I$, такой что в I' нет ни одной точки из A. Множество A на прямой называется всюду плотным, если во всяком интервале есть точка множества A.

Задача 10. Покажите, что множество чисел из отрезка $[0, 1]$, в десятичной записи которых не встречается последовательность 223222, является нигде не плотным.

Задача 11. *Теорема Бэра.*

(a) Докажите, что прямую нельзя представить в виде счетного объединения нигде не плотных множеств.

(b) Докажите, что пересечение счетного набора открытых всюду плотных множеств обязательно содержит точку, т. е. не является пустым множеством.

Задача 12. Является ли множество иррациональных чисел объединением счетного семейства замкнутых множеств?