НМУ, I курс, 30.10.2017

Листок 6.

Непрерывность и предел функции.

Определения.

Пусть $A \subset \mathbb{R}$ и $f\colon A \mapsto \mathbb{R}$. Функция f непрерывна в точке $a \in A$ по множеству A, если для всякой последовательности $x_n \in A$ верно $x_n \to a \Longrightarrow f(x_n) \to f(a)$.

Из свойств предела последовательности легко выводится, что сумма, произведение и композиция непрерывных функций являются непрерывными функциями. Кроме того, функция f непрерывна в точке a по множеству A тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ такое, что $\forall x \in A$ верно $|x-a| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Пусть $A \subset \mathbb{R}$ и $f\colon A \mapsto \mathbb{R}$. Пусть a – предельная точка A. Функция f имеет в точке a предел по множеству A равный числу b, если функция $\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x),\ x \in A \\ b,\ x = a \end{cases}$ является непрерывной в точке a по множеству $A \cup \{a\}$. Далее пишем $\lim_{x\to a} f(x) = b$.

Задача 1. Покажите, что следующее утверждение неверно. Пусть $f\colon A \mapsto B$, $g\colon B \mapsto \mathbb{R}$ и a – предельная точка A и b – предельная точка B. Тогда из существования пределов $\lim_{x\to a} f(x) = b$ и $\lim_{y\to b} g(y) = c$ следует $\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$. Как исправить ошибку?

Задача 2. Пусть f не убывает на интервале (a,b). Докажите, что если функция f ограничена сверху, то существует предел в точке b по множеству (a,b) (такой предел называют левым, аналогично предел в точке a по (a,b) называют правым). Докажите, что множество точек разрыва монотонной функции не более чем счетно.

Задача 3. Докажите, что $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ и $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$.

Глобальные свойства непрерывных функций

Функция f непрерывна на множестве A, если она непрерывна в каждой его точке.

Задача 4. Докажите, что множество непрерывных на $\mathbb{R}$ функций континуально.

Задача 5. (a) Докажите, что множество нулей непрерывной функции является замкнутым множеством и всякое замкнутое множество является множеством нулей некоторой непрерывной функции.

(b) Докажите, что для всяких двух непересекающихся замкнутых множеств существует непрерывная функция, которая равна нулю на одном из них и единице на другом.

Задача 6. Пусть функция $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такова, что $f(K)$ является компактом для всякого компакта K. Верно ли, что f непрерывна?

Функция f является равномерно непрерывной на множестве A, если для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что для всяких $x, y \in A$ верно $|x-y| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Задача 7. (a) Докажите, что непрерывная на компакте функция является равномерно непрерывной. Покажите, что от компактности нельзя отказаться.

(b) Пусть f – непрерывна на $\mathbb{R}$ и у неё существуют конечные пределы при $x \to \pm\infty$. Докажите, что f равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$.

(c) Докажите, что если f равномерно непрерывна на $\mathbb{R}$, то $|f(x)| \leq C + C|x|$.

Задача 8. (a) Опишите все непрерывные функции на прямой, удовлетворяющие тождеству $f(x+y) = f(x) + f(y)$.

(b) Существует ли разрывная функция, для которой выполняется тождество из (a)?

(c) Можно ли в пункте (a) заменить непрерывность монотонностью?

(d) Можно ли в пункте (a) заменить непрерывность ограниченностью f в некоторой окрестности нуля?

Задача 9. (a) Пусть f определена на $\mathbb{R}$. Докажите, что множество точек разрыва является не более чем счетным объединением замкнутых множеств.

(b) Докажите, что для всякого замкнутого множества F существует функция, у которой множество точек разрыва F.

(c)* Докажите, что не более чем счетное объединение замкнутых множеств является множеством точек разрыва некоторой функции.

(d) Существует ли функция на $\mathbb{R}$, непрерывная во всех рациональных точках и разрывная во всех иррациональных?

Теорема о промежуточном значении

Задача 10. Докажите, что непрерывная функция f из $[0,1]$ в $[0,1]$ имеет неподвижную точку x: $f(x) = x$.

Задача 11. Пусть f – непрерывная функция из $[0,1]$ в $\mathbb{R}$, причем $f(0) = f(1)$. Докажите, что для всякого натурального числа n найдется горизонтальный отрезок с концами на графике этой функции, длина которого равна $1/n$. Докажите, что если число l не имеет вид $1/n$, то найдется функция указанного выше вида, в график которой уже нельзя вписать горизонтальный отрезок длины l.

Задача 12.

(a) (*Канторова лестница*). Постройте монотонную непрерывную функцию $h : [0,1] \to [0;1]$, такую что $h(0) = 0$, $h(1) = 1$, и $h(x)$ постоянна на любом интервале, не содержащем точек из канторова множества.

Отображение γ: $[0,1] \mapsto \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, где x, y – непрерывные функции, называется непрерывной кривой в $\mathbb{R}^2$.

(b) (*Кривая Пеано*) Постройте непрерывную кривую, которая проходит через каждую точку квадрата $[0,1] \times [0,1]$.