НМУ, I курс, 13.11.2017

Листок 7.

Функциональные последовательности.

Последовательность функций $f_n\colon A \mapsto \mathbb{R}$ сходится к функции f поточечно на A, если для всякого $x \in A$ верно $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.

Последовательность функций $f_n\colon A \mapsto \mathbb{R}$ сходится к функции f равномерно на A, если $\sup_{x\in A} |f_n(x) - f(x)| \to 0$ при $n \to \infty$.

Задача 1. (Критерий Коши) Докажите, что последовательность функций f_n сходится на A равномерно тогда и только тогда, когда $\forall \varepsilon > 0\ \exists N$ такое, что $\forall n, m > N$ выполняется неравенство $\sup_{x\in A} |f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

Задача 2. (Признак Вейерштрасса) Пусть $\sup_{x\in A} |f_{n+1}(x) - f_n(x)| \le a_n$ и ряд $\sum_n a_n$ сходится. Покажите, что последовательность функций f_n сходится равномерно к некоторой функции f на множестве A. Переформулируйте этот признак для рядов (ряд сходится равномерно, если равномерно сходится последовательность его частичных сумм). Приведите пример, показывающий, что признак Вейерштрасса не является необходимым условием равномерной сходимости.

Задача 3. Исследуйте поточечную и равномерную сходимость:
(a) $f_n(x) = x^n - x^{2n}$, $x \in [0, 1]$, (b) $f_n(x) = \mathrm{arctg} nx$, $x > 0$, (c) $\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-nx}$, $x > 0$.

Задача 4. Пусть последовательность многочленов P_n такова, что $\mathrm{deg} P_n \le m$ для всех n и P_n поточечно сходятся к некоторой функции f на отрезке $[0, 1]$. Докажите, что f является многочленом степени не выше m и P_n равномерно сходятся к f на $[0, 1]$.

Задача 5. (a) Пусть функции f_n непрерывны по A в точке $a \in A$ и сходятся равномерно к функции f на A. Тогда функция f непрерывна по A в точке a. Покажите на примере, что для поточечной сходимости это утверждение не выполняется.

(b) Пусть функции f_n непрерывны на $\mathbb{R}$ и сходятся поточечно к функции f. Докажите, что у функции f множество точек непрерывности всюду плотно.

Задача 6. Пусть f – непрерывная функция на $[0, +\infty)$. Верно ли, что $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, если (a) $f(x + n) \to 0$ для каждого $x \ge 0$, (b) $f(nx) \to 0$ для каждого $x \ge 0$?

Задача 7. Докажите, что из последовательности функций $f_n(x) = \sin nx$ на отрезке $[0, 1]$ нельзя выбрать поточечно сходящуюся подпоследовательность.

Задача 8. (Теорема Хелли) Докажите, что из равномерно ограниченной на отрезке последовательности монотонных функций можно выбрать подпоследовательность, которая поточечно сходится.

Задача 9. Пусть последовательность непрерывных монотонных на отрезке функций поточечно сходится к непрерывной функции. Докажите, что тогда эта последовательность сходится равномерно.

Задача 10. (признак Дини) Пусть последовательность непрерывных на отрезке функций в каждой точке является монотонной числовой последовательностью и поточечно сходится к непрерывной функции. Докажите, что тогда эта последовательность сходится равномерно.

Задача 11. Пусть f – непрерывная на отрезке $[0, 1]$ функция. Рассмотрим ломанные с вершинами в точках $(r_i, f(r_i))$, где $0 = r_0 < r_1 < \ldots < r_N = 1$ – рациональные числа из отрезка $[0, 1]$. Докажите, что функцию f можно равномерно приблизить последовательностью ломанных такого вида.

Задача 12. (Теорема Арцела-Асколи) Предположим, что последовательность непрерывных функций $\{f_n\}$ на отрезке $[0, 1]$ такова, что (i) последовательность $\{f_n\}$ равномерно ограничена, (ii) $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что для всех $x, y \in [0, 1]$ и всех n верно $|x - y| < \delta \Longrightarrow |f_n(x) - f_n(y)| < \varepsilon$ (функции f_n равностепенно непрерывны).

Тогда из этой последовательности можно выбрать подпоследовательность, которая сходится равномерно на $[0, 1]$ к непрерывной функции.