

Листок 8.

ПРОИЗВОДНАЯ И ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА.

Пусть f определена в окрестности точки a . Говорят, что f дифференцируема в точке a , если существует конечный предел $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$, который называют производной функции f и обозначают через $f'(a)$.

Задача 1. Докажите, что f дифференцируема в точке a тогда и только тогда, когда

$$f(a + h) - f(a) = Ah + \alpha(a, h)h, \quad \lim_{h \rightarrow 0} \alpha(a, h) = 0.$$

Линейную функцию $h \mapsto Ah$ называют дифференциалом функции f в точке a .

Задача 2. Найдите $f'(-1)$, где $f(x) = (x + 1)(x + 2) \dots (x + 250)$.

Задача 3. (а) Пусть f всюду дифференцируемая функция и $F = \{x : f(x) = 0\}$. Докажите, что множество $x \in F$, для которых $f'(x) \neq 0$, не более чем счетно.

(б)* Пусть f – непрерывна на $[a, b]$ и $f'(x) = 0$ для всех x кроме не более чем счетного множества. Докажите, что $f = \text{const}$.

Задача 4. Что больше: e^π или π^e ?

Задача 5. Докажите, что функция $f(x) = e^{-1/x^2}$ при $x > 0$ и $f(x) = 0$ при $x \leq 0$ бесконечно дифференцируема на \mathbb{R} .

Задача 6. Пусть $f \in C^\infty(-1, 1)$, f отлична от нуля в любой проколотой окрестности $x = 0$ и $f^{(k)}(0) = 0$ для всякого $k \geq 0$. Докажите, что $\sup_{k, x} |f^{(k)}(x)| = +\infty$.

Задача 7. Пусть f – непрерывно дифференцируемая функция на $[0, +\infty)$ и $f(0) = 1$. Вычислите предел $\lim_{n \rightarrow \infty} (f(\frac{t}{n}))^n$ для всякого $t \geq 0$.

Задача 8. Найдите значение предела

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(shx) - sh(\sin x)}{x^7}.$$

Задача 9. Пусть $x = x(t)$ – корень уравнения $x^5 + x = t$. Найдите первые три члена разложения функции $x(t)$ в точке $t = 0$.

Задача 10. Найдите первые три члена асимптотики n -ого корня уравнения $tg(x) = x$.

Задача 11.* Для произвольной последовательности $\{a_k\}$ докажите, что существует бесконечно дифференцируемая функция $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, такая что $f^{(k)}(0) = a_k$.

Задача 12. (а) К реке шириной a построен под прямым углом канал шириной b . Какой максимальной длины суда могут входить в этот канал?

(б) Четыре букашки, сидевшие в вершинах единичного квадрата, стали двигаться друг за другом с единичной скоростью, держа курс на преследуемого. Найдите траектории их движения.

(с) Чашку цилиндрической формы с чаем вращают вокруг своей оси с постоянной угловой скоростью ω . Найдите форму поверхности чая.